

DUPLICANT

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TC 52/73

AUGUSTUS

N.M. TEMME
BOOLEAANSE ALGEBRA

2e druk

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Inhoud

	blz.
I. Verzamelingen	1
1. Elementaire begrippen uit de verzamelingsleer	1
2. Bewerkingen met verzamelingen	6
3. Faktorontbinding en vereenvoudiging van veeltermen	11
4. Enige toepassingen van de verzamelingsleer	13
II. Booleaanse Algebra	17
1. Binaire operaties	17
2. Definitie en eigenschappen van een Booleaanse algebra	21
3. De disjunctieve normaalvorm van een Booleaanse funktie	25
4. De konjunctieve normaalvorm van een Booleaanse funktie	32
III. Propositie logika	36
1. De Booleaanse algebra met twee elementen	36
2. Propositionen en waarheidswaarden	38
3. Kwantoren	46
IV. Schakelalgebra	53
1. Booleaanse algebra en schakelsystemen	53
2. Andere schakelsystemen	61
Literatuur	70
Lijst van errata	71

Samenvatting

Deze inleiding tot de Booleaanse Algebra begint met een hoofdstuk over verzamelingen. Na de axiomatische behandeling van de Booleaanse Algebra wordt de theorie toegepast op de propositie logika en elementaire schakelingen.

I. Verzamelingen.

§1. Elementaire begrippen uit de verzamelingsleer.

Enige voorbeelden van verzamelingen zijn

- I) de verzameling van alle natuurlijke getallen;
- II) de verzameling van alle rationale x waarvoor geldt $0 \leq x \leq 1$;
- III) de verzameling van alle reële wortels van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$.

We behoeven ons niet tot de wiskunde te beperken.

- IV) de verzameling van de hoofdsteden van Europa;
- V) de verzameling van alle Nederlanders;
- VI) de verzameling van alle Nederlandse gezinnen (één-persoons gezinnen niet uitgezonderd).

We definiëren niet wat een verzameling is, we geven slechts voorbeelden. Het begrip wordt intuïtief geïntroduceerd.

3 is lid van de verzameling van de natuurlijke getallen; we zeggen ook dat 3 een element is van deze verzameling of ook dat 3 tot deze verzameling behoort. Amsterdam is een element van de verzameling uit voorbeeld IV. Als a tot de verzameling A behoort, dan wordt dit aangegeven met

$$a \in A.$$

Als a geen lid van A is schrijven we

$$a \notin A.$$

Het teken " $\in$ " wordt het adhesieteken genoemd.

Een verzameling is welomschreven als van elk object kan worden nagegaan of het tot de verzameling behoort of niet.

Als A en B verzamelingen zijn en als elk element van A lid is van B en elk element van B lid is van A dan zijn de verzamelingen aan elkaar gelijk en we schrijven $A = B$.

Als alle elementen van een verzameling A voorkomen in een verzameling B dan is A een deelverzameling van B; we zeggen ook A is bevat in B. We schrijven

$$A \subset B, \text{ of ook } B \supset A.$$

Het teken " $\subset$ " wordt het inclusieteken genoemd.

Als er minstens één element van A niet in B voorkomt dan is A geen deelverzameling van B en we schrijven

$$A \not\subset B, \text{ of ook } B \not\supset A.$$

Een nadere omschrijving van de gelijkheid van twee verzamelingen A en B kunnen we geven door te zeggen dat

$$A = B \text{ dan en slechts dan als } A \subset B \text{ én } B \subset A.$$

Een verzameling kan omschreven worden door woorden, maar ook door de elementen in een lijst te plaatsen. Zo kan de verzameling uit voorbeeld I, die in de wiskunde wordt aangeduid met N, aangegeven worden door

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

De verzameling $A = \{1, 2, 3\}$ is een deelverzameling van N; de verzameling $B = \{3\}$ is een deelverzameling van N en A. Het getal 3 is een element van N, A en B. Met gebruikmaking van de ingevoerde symbolen kunnen we ook schrijven

$$\{3\} \subset \{1, 2, 3\}, \text{ of wel } B \subset A;$$

$$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}, \text{ of wel } A \subset N;$$

verder

$$B \subset A \subset N$$

en

$$3 \in N, \quad 3 \in A, \quad 3 \in B.$$

Let vooral op het verschil tussen

$$3 \in A \quad \text{en} \quad \{3\} \subset A;$$

3 is een element van de verzameling A en de verzameling {3} is een deelverzameling van A.

De verzamelingen {1,2,3} en {3,1,2} zijn aan elkaar gelijk omdat ze dezelfde elementen bevatten. Ook geldt $\{1,2,3\} = \{1,3,2,2\}$. Een verzameling verandert dus niet als een element in de lijst herhaald, of als de volgorde in de lijst veranderd wordt.

Als een verzameling geen elementen bevat, dan noemen we deze verzameling leeg. We spreken van de lege verzameling. Er is niets dat lid is van de lege verzameling. De verzameling uit voorbeeld III is leeg. Een ander voorbeeld is: de verzameling van de gehuwde Nederlanders jonger dan 7 jaar. De lege verzameling geven we aan met het symbool 0.

De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling, ook van de lege verzameling zelf.

De verzamelingen die in een bepaald probleem beschouwd worden kan men opvatten als deelverzamelingen van een vaste verzameling U. Deze verzameling U heet de universele verzameling voor dit probleem en we geven deze verzameling aan met het symbool 1. In voorbeeld I kan men als de universele verzameling beschouwen de verzameling van de reële getallen; daarentegen in voorbeeld V de universele verzameling als de verzameling van alle menselijke aardbewoners.

De symbolen 0 en 1 moeten niet beschouwd worden als getallen maar als aanduidingen voor de bedoelde begrippen.

Het komplement X' van een verzameling X die bevat is in een universele verzameling U is de verzameling van alle elementen van U, die niet tot X behoren.

Het komplement van de lege verzameling is de universele verzameling:

$$0' = 1.$$

Als we als universele verzameling de reële getallen en voor X de verzameling die bestaat uit alle positieve getallen, dan is X' de verzameling die als elementen heeft alle reële getallen x , waarvoor $x \leq 0$.

De verzamelingen A en A' hebben geen gemeenschappelijke elementen. Er bestaat wel een verzameling die zowel van A als van A' een deelverzameling is.

Om van het komplement van een verzameling X te kunnen spreken dienen we duidelijk voor ogen te hebben wat we onder de universele verzameling verstaan.

De verzamelingen in de voorbeelden I en II bevatten oneindig veel elementen terwijl in de overige voorbeelden III t/m VI slechts eindig veel elementen voorkomen. We kunnen spreken van resp. oneindige en eindige verzamelingen.

Oefeningen.

- 1) Noem X de verzameling van de oplossingen van de vergelijking $2x = 6$, waarin x een reëel getal is. Laat verder voor y gelden $y = 3$.
Is dan $y = X$?
- 2) Laat de verzameling M gedefinieerd worden door $M = \{3, 4, 5, 6\}$. Vertel welke van de zes volgende beweringen juist is.
 - a) $3 \in M$;
 - b) $3 \subset M$;
 - c) $\{3\} \in M$;
 - d) $\{3\} \subset M$;
 - e) $\{3, 6\} \subset M$;
 - f) $\{5\} \subset \{4, 5\} \subset M$.
- 3) Van drie verzamelingen A , B en C is bekend dat A een deelverzameling is van B en dat B een deelverzameling is van C . Veronderstel dat $1 \in A$, $2 \in B$, $3 \in C$, $4 \notin A$, $5 \notin B$, $6 \notin C$.
Welke van de volgende beweringen is juist?

- a) $1 \in C$;
- b) $2 \in A$;
- c) $3 \notin A$;
- d) $4 \in B$;
- e) $5 \notin A$;
- f) $6 \notin A$.

4) Beschouw de verzamelingen van de voorbeelden V en VI en noem ze respectievelijk A en B. Ga na dat elk element van B een deelverzameling is van A. Zijn de verzamelingen aan elkaar gelijk? Motiveer het antwoord.

5) Van drie verzamelingen is bekend dat $A \subset B$ en $B \subset C$. Bewijs dat $A \subset C$.

6) Uit $A = B$ volgt $A' = B'$.

7) Als $A \subset B$ en $A' \subset B$ dan is $B = 1$.

8) Als $A \subset B$ dan is $B' \subset A'$;
als $B' \subset A'$ dan is $A \subset B$.

Deze twee beweringen kunnen tot één bewering worden samengevoegd:
een nodige en voldoende voorwaarde voor $A \subset B$ is $B' \subset A'$;
of ook:

$A \subset B$ dan en slechts dan als $B' \subset A'$.

9) A en B hebben geen elementen gemeenschappelijk dan en slechts dan als $A \subset B'$.

10) Bepaal het aantal verschillende deelverzamelingen van een eindige verzameling van n elementen ($n \geq 0$).

§2. Bewerkingen met verzamelingen.

Als we twee verzamelingen X en Y beschouwen dan kunnen we de elementen bij elkaar gooien en we krijgen zo weer een verzameling. We noemen deze verzameling de vereniging van X en Y en we noteren hem met $X + Y$.

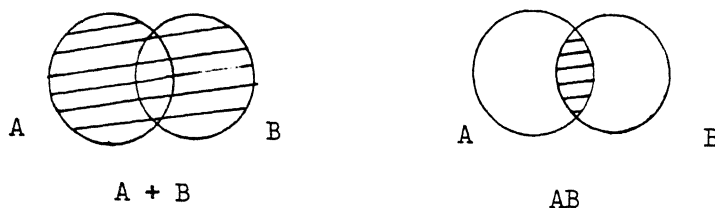
De doorsnede van twee verzamelingen X en Y is de verzameling van de elementen die zowel in X als in Y voorkomen. We noteren deze verzameling met XY , of $X.Y$.

Als bijvoorbeeld X de verzameling der positieve reële getallen voorstelt en Y de verzameling der reële getallen y waarvoor $-1 \leq y \leq 1$, dan is $X + Y$ de verzameling reële getallen z , waarvoor $z \geq -1$. De doorsnede XY is de verzameling reële getallen z , waarvoor $0 < z \leq 1$.

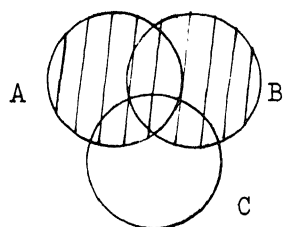
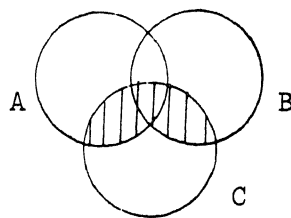
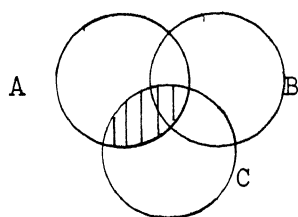
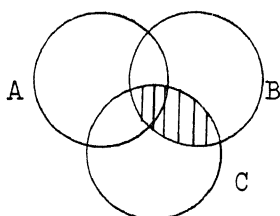
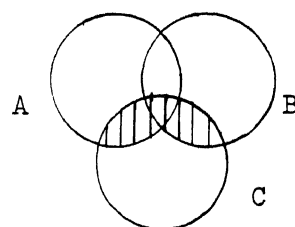
Als A en B geen elementen gemeenschappelijk hebben, dan noemen we A en B disjunct. Hun doorsnede AB bevat dan geen elementen en is dus leeg. In dat geval is dus $AB = 0$. Aangezien A en A' geen elementen gemeen hebben is $AA' = 0$. Voorts is $A + A' = 1$.

De ingevoerde symbolen $(+)$ en $(.)$ voor vereniging en doorsnede zijn volkomen willekeurig. Vaak wordt ook gewerkt met $(\cup)$ en $(\cap)$. De symbolen $(+)$ en $(.)$ volgen niet de rekenregels zoals bij de reële getallen. Zo kan men gemakkelijk inzien dat voor een willekeurige verzameling A geldt $A + A = A$.

In de volgende figuur worden $A + B$ en AB schematisch voorgesteld.



Dergelijke figuren worden Venn diagrammen genoemd. Met behulp van deze plaatjes kan men sommige relaties gemakkelijk inzien. Bijvoorbeeld $A + AB = A$. Voor drie verzamelingen A , B en C kan men met behulp van een Venn diagram nagaan dat $(A + B)C = AC + BC$.

 $A + B$  $(A+B)C$  AC  BC  $AC + BC$

Een verificatie via een Venn diagram levert echter geen bewijs. Het bewijs van $(A+B)C = AC + BC$ verloopt als volgt. Noem de verzameling in het linkerlid F en die in het rechterlid G . We moeten dan bewijzen dat $F = G$.

Twee verzamelingen F en G zijn gelijk als $F \subset G$ en $G \subset F$.

1) We bewijzen eerst $F \subset G$.

Neem een willekeurig element x uit F : $x \in F$.

Dan is $x \in C$ en $x \in A+B$. Er zijn dan twee mogelijkheden

a) $x \in C$ en $x \in A$ of b) $x \in C$ en $x \in B$.

In geval a geldt dan $x \in AC$.

In geval b geldt dan $x \in BC$.

Voor beide gevallen a) en b) geldt dan zeker $x \in AC + BC$.

Dus $x \in G$. Aangezien x willekeurig gekozen is, mag men veronderstellen dat elk element van F tot G behoort, of wel $F \subset G$.

2) We bewijzen nu $G \subset F$.

Neem een willekeurig element x uit G , $x \in G$.

Er zijn dan twee mogelijkheden

a) $x \in AC$ of b) $x \in BC$.

In geval a) is dan $x \in A$ en $x \in C$;

maar dan is ook $x \in A + B$ en $x \in C$, zodat $x \in (A+B)C$.

In geval b) is dan $x \in B$ en $x \in C$; maar dan is ook $x \in A+B$ en $x \in C$, zodat $x \in (A+B)C$.

Voor beide gevallen a) en b) geldt dus $x \in F$.

Aangezien x een willekeurig element is van G , geldt dus $G \subset F$.

Uit 1) en 2) volgt dan $F = G$.

We kunnen nu een lijst opstellen van de belangrijkste wetten of identiteiten, die bij het manipuleren met verzamelingen gebruikt kunnen worden. We veronderstellen dat X , Y en Z drie deelverzamelingen zijn van een universele verzameling, die we aanduiden met 1 .

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| (1a) $XY = YX$ | (1b) $X+Y = Y+X$ |
| (2a) $(XY)Z = X(YZ)$ | (2b) $(X+Y) + Z = X + (Y+Z)$ |
| (3a) $X(Y+Z) = XY + XZ$ | (3b) $X + YZ = (X+Y)(X+Z)$ |
| (4a) $XX = X$ | (4b) $X + X = X$ |
| (5a) $X(X+Y) = X$ | (5b) $X + XY = X$ |
| (6a) $XX' = 0$ | (6b) $X + X' = 1$ |
| (7) $(X')' = X$ | |
| (8a) $(XY)' = X' + Y'$ | (8b) $(X+Y)' = X'Y'$ |
| (9a) $0X = 0$ | (9b) $1 + X = 1$ |
| (10a) $1X = X$ | (10b) $0 + X = X$ |
| (11a) $0' = 1$ | (11b) $1' = 0$ |

Deze formules doen denken aan zekere regel in de rekenkunde. Er zijn echter uitzonderingen, zoals 3b, 4a, etc. Al deze formules kunnen bewezen worden; formule 3a is hierboven reeds bewezen. Met behulp van Venn diagrammen kunnen deze relaties aanschouwelijk worden weergegeven.

Nadere beschouwing van de a-formules en b-formules leert het volgende: bij onderlinge verwisseling van de symbolen 0 en 1 en van de symbolen $(+)$ en $(.)$ ontstaat uit een a-formule een b-formule en uit een b-formule een a-formule.

We zeggen dat een b-formule de duale vorm is van de corresponderende a-formule en omgekeerd. Als in een identiteit het dualiteitsprincipe wordt toegepast, dan ontstaat weer een juiste formule.

Als men bijvoorbeeld voor twee willekeurige verzamelingen X en Y bewezen heeft dat

$$XY + X'Y + XY' + X'Y' = 1$$

dan volgt uit het dualiteitsprincipe dat

$$(X+Y)(X'+Y)(X+Y')(X'+Y') = 0.$$

Passen we op de duale vorm van een formule het dualiteitsprincipe toe, dan ontstaat weer de oorspronkelijke formule.

Oefeningen.

1. Bewijs met behulp van de tabel dat voor twee willekeurige verzamelingen X en Y geldt

$$XY + X'Y + XY' + X'Y' = 1.$$

2. Neem voor de universele verzameling $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$$A = \{1,2,3,4,5\}, \quad B = \{1,3,5,7\} \text{ en } C = \{2,5,6,7\}.$$

Bepaal dan

- a) $A + C$; b) AB ; c) $B'C$; d) $A'B'$; e) $B' + C$;
 f) $B' + C$; g) $(AC')'$; h) AC' ; i) $(AB)'$; j) $(AA')'$;
 k) $ABC + A'BC + B'C + C'$.

3. Bewijs: als $AB = 0$ dan is $A + B' = B'$.

4. Als $A + X = A + B$ en $AX = 0$
 dan is $X = A'B$.

5. Als $AB' = 0$ en $BC' = 0$, dan is $AC' = 0$.

6. Bewijs dat voor twee verzamelingen A en B geldt
 $A = 0$ dan en slechts dan als $B = AB' + A'B$.

7. Bewijs dat

$A = B$ dan en slechts dan als $A + C = B + C$ voor elke C .

Geef door middel van een voorbeeld aan dat als $A + C = B + C$ voor zekere C , dat hier niet uit volgt $A = B$.

8. Geef de duale vorm van de volgende relaties

1) $A + A'B = A + B;$

2) $XY + ZW = (Z+X)(Z+Y)(W+X)(W+Y);$

3) $(ABC)' = A' + B' + C';$

4) $ABC + A'B + ABC' + B' = 1.$

9. Bewijs dat $A + B = 1$ dan en slechts dan als $A' \subset B$.

10. Bewijs dat $A \subset C$ dan en slechts dan als $A + BC = (A+B)C$.

11. Voor twee willekeurige verzamelingen geldt

$$X + Y = X + X'Y.$$

Bewijs dit en formuleer de duale versie van deze bewering.

12. Bewijs dat $A'C = 0$ dan en slechts dan als $A + C' = 1$.

Formuleer de duale versie van deze bewering.

§3. Faktorontbinding en vereenvoudiging van veeltermen.

Onder een variabele verstaan we een letter, die een verzameling voorstelt, al of niet voorzien van een aksent. (Bijvoorbeeld, X , Y' , A , B , C' , etc.).

Een term is het produkt van een aantal variabelen. Een term stelt de verzameling voor die de doorsnede is van de door de variabelen aangegeven verzamelingen. (Bijvoorbeeld X , XY' , $XA'B'$, etc.).

Een veelterm of polynoom is de som van een aantal termen. Een veelterm stelt de verzameling voor die de vereniging is van de door de termen aangegeven verzamelingen. (Bijvoorbeeld X , $X+Y'$, $AB + XY'Z + XZ$, etc.).

Een algebraïsche uitdrukking kan bestaan uit een produkt van een aantal veeltermen. Men noemt zo'n veelterm in dat geval een faktor (Bijvoorbeeld $X(X'+YZ)$ ($X+Y+Z'$) is een algebraïsche uitdrukking die is opgebouwd uit drie factoren).

Als een faktor een veelterm is, waarvan de termen louter variabelen zijn, dan spreekt men van een lineaire faktor. (Bijvoorbeeld in $X(X+YZ)(X+Y+Z)$ zijn de factoren X en $X+Y+Z$ lineair).

Elke algebraïsche uitdrukking kan door uitvermenigvuldiging van de verschillende factoren geschreven worden als een veelterm.

Elke veelterm kan worden ontbonden in lineaire factoren.

Een praktische methode om de ontbinding in lineaire factoren uit te voeren gaat als volgt.

- 1) Noem de gegeven veelterm F en bepaal de duale vorm $D(F)$ van F .
- 2) Schrijf $D(F)$ als een veelterm, door uitvermenigvuldiging.
- 3) Bepaal de duale vorm van de in 2) verkregen veelterm.

De in 3) verkregen uitdrukking is gelijk aan F , aangezien $D(D(F)) = F$; echter F is nu ontbonden in lineaire factoren. Deze methode is in sommige gevallen wat omslachtig, maar leidt altijd tot het gewenste resultaat.

Voorbeeld. Ontbind de veelterm $ABC + A'B'D + C'D'$ in lineaire factoren.

1) $D(F) = (A+B+C) (A'+B'+D)(C'+D')$.

2) Uitwerking geeft:

$$D(F) = AB'C' + AC'D + A'BC' + BC'D \\ + AB'D' + A'BD' + A'CD' + B'CD'.$$

3) De duale vorm hiervan is gelijk aan F.

$$\text{Dus } F = (A+B'+C')(A+C'+D)(A'+B+C')(B+C'+D) \\ (A+B'+D')(A'+B+D')(A'+C+D')(B'+C+D').$$

Een gegeven algebraïsche uitdrukking kan vaak vereenvoudigd worden. Het is niet altijd duidelijk welke vorm als de meest eenvoudige beschouwd moet worden. Hierover kan echter wel een afspraak gemaakt worden. Als eenvoudigste vorm van een algebraïsche uitdrukking beschouwen we die vorm die het minst aantal symbolen telt. Onder symbolen verstaan we een letter die een verzameling voorstelt, elk paar haakjes, een aksent, "+" en "." .

Zo is de vorm $X(Y+Z')$ eenvoudiger dan $XY + YZ'$, want de eerste telt zeven symbolen en de laatste acht.

Oefeningen.

1) Schrijf de volgende uitdrukkingen als een veelterm

- a) $(A+BC)(A+C)$
- b) $(X+Y)(X'+Y)(X+Y')(X'+Y')$
- c) $(A+B+C'+A'X) [AC'(B'+X')]'.$

2) Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen.

- a) $ABC + ABC' + A'B$
- b) $(A+B'+C)(AB+A'C')'$
- c) $(XY+XY'+X'Y)' (X'Y'+ZW)$
- d) $XY(XZ'+XY+XYZ)$
- e) $ABX + AB'X + X'ABX$
- f) $(XY+X'Y'+XY')' [(X'+Y')(X+Y')]' .$

3) Ontbind de volgende veeltermen in lineaire factoren

- a) $XY + ZY'$
- b) $XY' + X'Y + X'Z$
- c) $ABC + A'D$
- d) $XY + YZ + Y.$

§4. Enige toepassingen van de verzamelingsleer.

Het aantal elementen in een verzameling X zullen we aangeven met $n(X)$.

Als twee verzamelingen disjunkt zijn dan is $n(X+Y) = n(X) + n(Y)$.

Als $XY \neq 0$, dan is deze regel onjuist; de elementen die zowel in X als in Y voorkomen worden dan twee keer geteld.

In het algemeen geldt dus

$$n(X+Y) = n(X) + n(Y) - n(XY).$$

Voor drie verzamelingen A , B en C geldt, zoals uit de vorige regel afgeleid kan worden

$$n(A+B+C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC).$$

Met behulp van deze regels kunnen o.a. statistische gegevens geanalyseerd worden.

Voorbeeld 1. Veronderstel dat uit een enquête onder 100 gezinnen de volgende gegevens verkregen zijn.

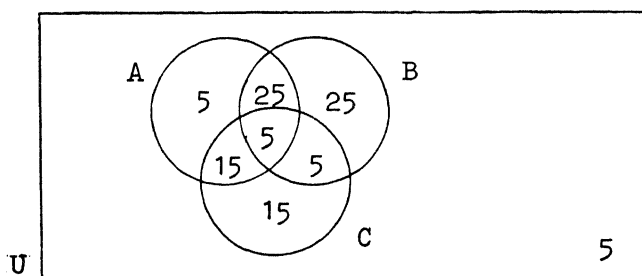
In 69 gezinnen bleek een televisietoestel aanwezig;

in 28 gezinnen bleek een radiotoestel aanwezig;

in 12 gezinnen bleek zowel radio als t.v. aanwezig.

Uit deze gegevens kan worden afgeleid dat in 15 gezinnen noch een radio, noch een televisie voorkwam.

Voorbeeld 2. Van drie verzamelingen A , B en C , die deelverzamelingen zijn van een verzameling U van 100 elementen, is bekend dat $n(A) = 50$, $n(B) = 60$, $n(C) = 40$, $n(AB) = 30$, $n(AC) = 20$, $n(BC) = 10$ en $n(ABC) = 5$.



We vullen eerst het aantal voor ABC in, aangezien alle drie verzamelingen hierbij betrokken zijn. Vervolgens de restanten voor AB, BC en AC en tenslotte de aantallen voor de resterende gedeelten van A, B en C. Er blijkt nu ook dat 5 elementen noch in A, B of C voorkomen, want $n(A+B+C) = 95$. Uit deze figuur is ook gemakkelijk af te lezen hoeveel elementen er zowel in B als in C voorkomen, maar niet in A; d.w.z. $n(A'BC) = 5$. Verder is $n(A+B+C') = 85$ en $n(A+B'C') = 55$.

Als tweede toepassing van de verzamelingsleer vermelden we het gebruik van verzamelingen en de inclusie eigenschappen in bepaalde problemen van logische aard. De volgende stellingen worden daarbij vaak gebruikt. Het bewijs van de stellingen is eenvoudig en voor sommige gevallen al via de vraagstukken gegeven.

Stelling 1. Als $X \subset Y$ en $Y \subset Z$, dan is $X \subset Z$.

Stelling 2. Als $X \subset Y$ en $X \subset Z$, dan is $X \subset YZ$.

Stelling 3. Als $X \subset Y$ dan is $X \subset Y+Z$ voor elke verzameling Z.

Stelling 4. $X \subset Y$ dan en slechts dan als $Y' \subset X'$.

Stelling 5. $X \subset Y$ dan en slechts dan als $XY' = 0$.

Stelling 1 kan gebruikt worden in de volgende redenering.

Als Socrates een mens is en alle mensen zijn sterfelijk, dan is Socrates sterfelijk.

Voor deze redenering lijkt elk bewijs overbodig; de uitspraken kunnen echter veel ingewikkelder worden en de konklusies zijn dan niet gemakkelijk te vinden.

Voorbeeld 3. Welke konklusie kan uit de volgende beweringen worden getrokken?

- a) Er zijn geen mensen die zowel lang haar hebben als ongelukkig zijn.
- b) Iemand die graag werkt is geen damslaper.
- c) Een mens is of langharig of werkt graag (of beide).

Neem voor de universele verzameling de verzameling van alle mensen en voer de volgende verzameling in:

- L de verzameling van langharigen;
- G de verzameling van gelukkige mensen;
- D de verzameling van alle damslapers;
- W de verzameling van de mensen die graag werken.

Uit a) volgt dat $LG' = 0$; wegens stelling 5 is dan $L \subset G$.

Uit b) volgt dat $W \subset D'$; wegens stelling 4 is dan $D \subset W'$.

Uit c) volgt dat $L+W = 1$; dus $L'W' = 0$ en wegens stelling 5 is dan $W' \subset L$.

Uit b) en c) volgt $D \subset L$.

Met dit resultaat en de konklusie uit a) vinden we dan $D \subset G$.

Men kan dus konkluderen dat alle damslapers gelukkig zijn.

Oefeningen.

1) Bij een onderzoek onder 100 mensen zijn de volgende gegevens verkregen

75 mensen zijn kommunist;

85 mensen hebben rood haar;

55 mensen die rood haar hebben zijn kommunist.

Ga na of de verkregen resultaten juist kunnen zijn.

2) Ga na of de volgende relaties juist zijn.

a) $n(A') = n(1) - n(A)$;

b) $n(A) = n(AB') + n(AB)$;

c) $n(A+B) = n(A'B') + n(A'B) + n(AB')$;

d) $n(1) = n(A) + n(B) + n(A'B') - n(AB)$.

3) Een statistisch onderzoek omtrent de studie in vreemde talen onder 100 leerlingen vermeldt de volgende gegevens:

Duits 26; Frans 48; Frans en Engels 8; Duits maar geen Engels 23; alleen Duits 18; Duits en Frans 8; geen vreemde taal 24.

a) hoeveel leerlingen leren Engels?

b) hoeveel leerlingen leren Duits en Engels, maar geen Frans?

c) hoeveel leerlingen leren Duits en hetzij Engels, hetzij Frans of beide?

4) De volgende gegevens betreffen een groep van 100 studenten.

1) Alle mannen zijn ouder dan 20 jaar.

2) Er zijn 50 vrouwen in de groep.

3) Er zijn 60 studenten ouder dan 20 jaar.

4) Er zijn 25 getrouwde vrouwen.

5) Er zijn 15 getrouwde studenten ouder dan 20 jaar.

6) Er zijn 10 getrouwde vrouwen ouder dan 20 jaar.

Beantwoord de volgende vragen.

- a) hoeveel getrouwde studenten zijn er?
 - b) hoeveel ongetrouwde vrouwen zijn ouder dan 20 jaar?
 - c) hoeveel ongetrouwde mannen zijn jonger dan 20 jaar?
 - d) hoeveel getrouwde mannen zijn er?
 - e) hoeveel studenten zijn jonger dan 20 jaar?
- 5) Als alle gekookte, rode kreeften dood zijn en alle gekookte, dode kreeften rood zijn, volgt hier dan uit dat alle rode, dode kreeften gekookt zijn?
- 6) De volgende gegevens betreffen de eerstejaars studenten aan een universiteit.
- 1) alle natuurkunde studenten volgen wiskunde;
 - 2) er zijn geen vrouwelijke natuurkunde studenten in deze groep;
 - 3) studenten die geen wiskunde volgen zijn geen chemici;
 - 4) elke student is of een vrouw of volgt sterrekunde of beide.

Ga na welke van de volgende beweringen afgeleid kan worden uit de gegevens.

- a) de studenten die geen wiskunde volgen zijn geen natuurkunde studenten;
- b) geen natuurkunde student is chemicus;
- c) alle natuurkunde studenten volgen zowel wiskunde als sterrekunde.
- d) alle natuurkunde studenten zijn chemici;
- e) alle chemici die opvoedkunde volgen, volgen ook wiskunde;
- f) elke vrouwelijke natuurkunde student doet chemie.

II. Booleaanse Algebra.

§1. Binaire operaties.

- a) Bij het optellen van reële getallen wordt uit twee getallen een nieuw reëel getal gevormd.
- b) Bij het vermenigvuldigen van reële getallen wordt uit twee getallen een nieuw reëel getal gevormd.
- c) Bij het bepalen van de vereniging van twee verzamelingen wordt een nieuwe verzameling gevormd.
- d) Bij het bepalen van de doorsnede van twee verzamelingen wordt een nieuwe verzameling gevormd.

In deze 4 voorbeelden wordt steeds uit twee objecten uit een bepaalde klasse volgens een zekere regel een nieuw object uit die klasse gevormd. Er is steeds sprake van een operatie tussen twee grootheden. We spreken van binaire operaties. Een definitie van dit begrip zal nu worden gegeven, de operatie zullen we aangeven met het symbool " $\circ$ ".

Definitie 1-1. Een binaire operatie $\circ$ op een verzameling M is een voorschrift volgens welk aan elk paar elementen (a, b) op een ondubbelzinnige wijze een element c van M toegevoegd wordt, waarbij c voorgesteld wordt door $c = a \circ b$.

Belangrijk hierbij is dat c weer tot de verzameling behoort.

De operatie " $-$ " op de verzameling van de natuurlijke getallen N is geen binaire operatie aangezien bijvoorbeeld 3-5 niet tot N behoort.

De operatie " $-$ " is wel een binaire operatie op de verzameling van de gehele getallen.

De operatie machtsverheffen op de verzameling van natuurlijke getallen is een binaire operatie aangezien voor elke m en n in N het resultaat m^n weer tot N behoort.

Is de operatie machtsverheffen een binaire operatie op de verzameling der gehele getallen?

Definitie 1-2. Een binaire operatie $\circ$ op een verzameling M is commutatief dan en slechts dan als voor elke a en b in M geldt

$$a \circ b = b \circ a.$$

Is op N de operatie machtsverheffen een commutatieve binaire operatie?

Definitie 1-3. Een binaire operatie $\circ$ op een verzameling M is associatief dan en slechts dan als voor elke a , b en c in M geldt

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Is de operatie "-" op de verzameling der gehele getallen een associatieve binaire operatie?

Is op N de operatie machtsverheffen een associatieve binaire operatie?

Definitie 1-4. Als $\circ$ en $*$ twee binaire operaties op dezelfde verzameling M voorstellen, dan is $\circ$ distributief over $*$ dan en slechts dan als voor elke a , b en c in M geldt

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

Voor elke m , p en q in N geldt $m(p+q) = mp + mq$, zodat in N de vermenigvuldiging distributief is over de optelling. Daarentegen geldt niet voor elke m , p en q in N dat $m + pq = (m+p)(m+q)$, zodat in N de optelling niet distributief is over de vermenigvuldiging.

In hoofdstuk I - §2 hebben we gezien dat voor drie verzamelingen X , Y en Z geldt

$$(3a) \quad X(Y+Z) = XY + XZ \quad \text{en} \quad (3b) \quad X + YZ = (X+Y)(X+Z)$$

zodat voor verzamelingen de operaties voor het vormen van vereniging en doorsnede distributief zijn over elkaar.

Definitie 1-5. Een element e in een verzameling M is een eenheidselement voor de binaire operatie $\circ$ dan en slechts dan als voor elk element a in M geldt

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

Bij het vormen van doorsneden bij verzamelingen treedt de universele verzameling als eenheidselement op aangezien voor elke A (die een deelverzameling is van de universele verzameling) $1.A = A.1 = A$.

Welke rol speelt de lege verzameling in dit verband?

Bij het vermenigvuldigen van reële getallen is het getal 1 het eenheidselement aangezien voor elk reëel getal a geldt $a.1 = 1.a = a$.

Welk element is het eenheidselement voor de binaire operatie machtsverheffen in N ?

Welk element is het eenheidselement voor de binaire operatie "+" bij de reële getallen?

Welk element is het eenheidselement voor de binaire operatie "-" bij de gehele getallen?

Oefeningen.

- 1) Een binaire operatie kan geen twee verschillende eenheidselementen hebben.
- 2) Beschouw de volgende operatie op de reële getallen gedefinieerd door

$$a \circ b = a + b - ab.$$

- a) Is deze operatie een binaire operatie?
- b) Is deze operatie commutatief?
- c) Is deze operatie associatief?
- d) Is er een eenheidselement voor deze operatie;
zo ja welk element?

- 3) Beschouw de volgende operatie op een klasse van verzamelingen gedefinieerd door

$$A \circ B = AB' + A'B.$$

- a) Is deze operatie een binaire operatie?
- b) Is deze operatie commutatief?
- c) Is deze operatie associatief?
- d) Is er een eenheidselement voor deze operatie;
zo ja welk element?
- e) Is de operatie "doorsnede vormen" distributief over $\circ$?
- f) Is de operatie "vereniging vormen" distributief over $\circ$?

§2. Definitie en eigenschappen van een Booleaanse algebra.

We zullen nu een definitie geven van een Booleaanse algebra door middel van 4 axioma's. De introductie geschiedt zonder verwijzing naar toepassingen. Ter orientatie kan men bij deze abstracte benadering houvast zoeken bij de verzamelingsleer uit het eerste hoofdstuk.

Definitie 2-1. Een verzameling B vormt met twee binaire operaties "+" en "." op B een Booleaanse algebra dan en slechts dan als voldaan is aan de volgende axioma's.

A-1. De binaire operaties zijn commutatief.

A-2. Er bestaan in B twee verschillende eenheidselementen, 0 en 1
respektievelijk ten opzichte van de operaties "+" en ".".

A-3. De operaties zijn distributief over elkaar.

A-4. Voor elk element $a \in B$ bestaat een element $a' \in B$, zodat
 $a+a' = 1$ en $aa' = 0$.

Het symbool voor de operatie "." wordt meestal weggelaten in de formules. De symbolen voor de operaties zijn willekeurig gekozen; elk ander paar symbolen zou gebruikt kunnen worden. Dit geldt ook voor de symbolen voor de eenheidselementen. Deze moeten niet als getallen worden beschouwd.

Merk op dat een verzameling zelf geen Booleaanse algebra kan zijn en dat een Booleaanse algebra geen verzameling is. Een Booleaanse algebra is een mathematisch systeem, al of niet abstract, bestaande uit een verzameling tesamen met twee operaties. Een Booleaanse algebra kan aangeduid worden door een tripel $(B, +, \cdot)$. De elementen van B worden de elementen van het systeem genoemd.

Nadere beschouwing van de axioma's leert dat de beide distributieve regels (A-3) uit elkaar ontstaan door onderlinge verwisseling van de symbolen "+" en ".". In A-4 kunnen deze symbolen verwisseld worden als 0 en 1 ook tegelijk onderling van plaats wisselen.

Deze formele manipulatie van het verwisselen suggereert en bewijst in feite een zeer belangrijke stelling uit de theorie der Booleaanse algebra.

Stelling 2-1. Elke stelling die afgeleid kan worden uit de axioma's van een Booleaanse algebra blijft geldig als in de bewering overal de operaties "+" en "." en de elementen 0 en 1 onderling verwisseld worden.

Bewijs. Het bewijs van deze stelling volgt onmiddellijk uit de symmetrie van de axioma's ten opzichte van de twee operaties en de twee eenheidselementen.

Deze stelling staat bekend als het dualiteitsprincipe. Een stelling die ontstaat door de verwisselingen uit te voeren heet de duale stelling van de oorspronkelijke stelling.

De axioma's zijn identiek aan sommige regels uit het eerste hoofdstuk voor verzamelingen. De volgende stelling is daarmee reeds bewezen.

Stelling 2-2. De deelverzamelingen van een universele verzameling U vormen tezamen met de binaire operaties "+" en "." een Booleaanse algebra. Het is mogelijk voor een Booleaanse algebra een lijst met wetten op te stellen analoog aan die in I-§2.

De a en b formules van regels 1, 3, 6 en 10 zijn de axioma's A-1, A-3, A-4 en A-2 respectievelijk, terwijl de overige regels uit deze vier kunnen worden afgeleid.

Ter completering van de lijst uit het vorige hoofdstuk vermelden we nu een aantal stellingen. Voor het bewijs ervan wordt naar de literatuur verwezen. (Whitesitt).

Stelling 2-3. Voor elke element a in een Booleaanse algebra geldt

$$a+a = a \quad \text{en} \quad aa = a.$$

Stelling 2-4. Voor elk element a in een Booleaanse algebra geldt

$$a+1 = 1 \quad \text{en} \quad a0 = 0.$$

Stelling 2-5. Voor elk paar elementen a en b in een Booleaanse algebra geldt

$$a+ab = a \text{ en } a(a+b) = a.$$

Stelling 2-6. In elke Booleaanse algebra zijn de operaties "+" en "." associatief. D.w.z. voor elke a , b en c in B geldt

$$(a+b) + c = a + (b+c) \text{ en } (ab)c = a(bc).$$

Stelling 2-7. Voor elk element a in een Booleaanse algebra geldt

$$(a')' = a.$$

Stelling 2-8. In elke Booleaanse algebra geldt

$$0' = 1 \text{ en } 1' = 0.$$

Stelling 2-9. Voor elk paar elementen in een Booleaanse algebra geldt

$$(ab)' = a' + b' \text{ en } (a+b)' = a'b'.$$

Met uitzondering van stelling 2-7 bevat elke stelling twee beweringen, die elkaars duale versie zijn.

Op grond van stelling 2-1 hoeft slechts een van de beweringen bewezen te worden.

Oefeningen.

Veronderstel dat a , b , c ,... elementen zijn van een Booleaanse algebra. Bewijs de volgende uitspraken en dualiseer de bewering.

- 1) $(a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c).$
- 2) $a + b = 0$ dan en slechts dan als $a = 0$ én $b = 0$.
- 3) $a = b$ dan en slechts dan als $ab' + a'b = 0$.
- 4) $b = c$ dan en slechts dan als $ab = ac$ én $a + b = a + c$.

- 5) $a = 0$ dan en slechts dan als $b = a'b + ab'$.
- 6) Bewijs dat de volgende condities equivalent zijn.
- 1) $ab' = 0$; 2) $a+b = b$; 3) $a'+b = 1$; 4) $ab = a$.
- 7) $a'b = 0$ dan en slechts dan als $a+bc = b(a+c)$ voor elke c .

§3. De disjunctieve normaalvorm van een Booleaanse funktie.

De begrippen variabele, term, veelterm, faktor en lineairefaktor die in I-§3 zijn ingevoerd voor verzamelingen gebruiken we ook in de Booleaanse algebra. Elke algebraïsche uitdrukking opgebouwd uit variabelen die elementen aanduiden van een Booleaanse algebra noemen we een Booleaanse funktie. Zo is $f = x + (x+y)'$ een Booleaanse funktie in 2 variabelen en $g = (a+b+c)' (x'+y'+z') + abcxyz$ een Booleaanse funktie in 6 variabelen. In het algemeen kunnen we spreken van funkties van n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Def. 3-1. Een minterm van n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ is een term waarin alle variabelen, al of niet voorzien van een aksent, voorkomen.

Indien een Booleaanse funktie f van n variabelen een veelterm is, waarbij alle termen mintermen zijn van n variabelen, dan zeggen we dat f geschreven is in disjunctieve normaalvorm in n variabelen.

Zo is $f = axy + ax'y + a'xy$ geschreven in disjunctieve normaalvorm in de 3 variabelen a, x en y ; $g = x + x'y'$ is niet in disjunctieve normaalvorm geschreven. Het kost echter weinig moeite om dit voor elkaar te krijgen. Als namelijk de term x door $x(y+y')$ vervangen wordt, dan kan g geschreven worden als $g = xy + xy' + x'y'$. Nu is g wel geschreven in disjunctieve normaalvorm (in 2 variabelen). De funktie $h = xy + ab$ is niet in disjunctieve normaalvorm geschreven. Ook hier kan deze vorm gevonden worden door enige veranderingen aan te brengen. Vervang namelijk xy door $xy(a+a')(b+b')$ en ab door $ab(x+x')(y+y')$ zodat, na uitvermenigvuldigen

$$h = abxy + ab'xy + a'bxy + a'b'xy + abxy' + abx'y + abx'y'.$$

In deze veelterm komen uitsluitend mintermen voor (van de variabelen a, b, x en y) en h is dus in disjunctieve normaalvorm geschreven.

Door herhaald vermenigvuldigen van termen met factoren $(x_1+x'_1), (x_2+x'_2), \dots, (x_n+x'_n)$ kan men van elke term een som van mintermen maken. Elke veelterm kan dus als een veelterm geschreven worden waarin uitsluitend mintermen voorkomen. Aangezien elke Booleaanse funktie geschreven kan worden als een veelterm geldt ook dat elke Booleaanse funktie als een som van mintermen kan worden geschreven.

Hiermede hebben we de volgende stelling bewezen.

Stelling 3-1. Elke Booleaanse funktie van n variabelen kan in een disjunctieve normaalvorm in n variabelen worden geschreven.

De funktie $f = xyz + xyz'$ is geschreven in disjunctieve normaalvorm in 3 variabelen. Echter, de funktie reduceert tot $f = xy(z+z') = xy$ en is nu geschreven in een disjunctieve normaalvorm in 2 variabelen. In het vervolg zullen we veronderstellen dat dergelijke vereenvoudigingen alle uitgevoerd zijn en dat we met een zo klein mogelijk aantal variabelen te maken hebben.

Als er sprake is van één variabele x dan bestaan er slechts twee mintermen in deze variabele, namelijk x en x' . Bij twee variabelen x en y bestaan er vier mintermen, namelijk xy , xy' , $x'y$ en $x'y'$. In het algemeen geldt

Stelling 3-2. Er zijn precies 2^n verschillende mintermen van de n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n, n \geq 1$.

Bewijs. Met behulp van volledige inductie.

Voor $n = 1$ is de bewering juist. Namelijk er bestaan precies 2 verschillende mintermen van één variabele x_1 , te weten x_1 en x_1' . Veronderstel nu dat de bewering juist is voor $1, 2, \dots, n$. (Induktie veronderstelling). Voor het geval n zijn er dan dus precies 2^n verschillende mintermen. Deze termen kan men vermenigvuldigen met x_{n+1} ; zo ontstaan er 2^n verschillende mintermen van $n + 1$ variabelen. Deze termen kan men ook vermenigvuldigen met x_{n+1}' ; zo ontstaan er weer 2^n verschillende mintermen van $n + 1$ variabelen. Een term uit de eerste groep kan niet gelijk zijn aan een term uit de tweede groep, aangezien in de eerste uitsluitend x_{n+1} voorkomt en in de tweede x_{n+1}' . Tesaamen vormen deze twee groepen $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ verschillende mintermen van $n + 1$ variabelen.

Uit de inductieveronderstelling voor n , volgt dus de juistheid van de bewering voor $n + 1$. De bewering is dus juist voor elk natuurlijk getal n .

Uit deze stelling volgt onmiddellijk dat een disjunctieve normaalvorm in n variabelen hoogstens 2^n mintermen in n variabelen kan bevatten.

Definitie 2-1. De komplete disjunctieve normaalvorm F_n in n variabelen is die disjunctieve normaalvorm die precies 2^n termen in n variabelen bevat.

In twee variabelen x en y is de komplette disjunctieve normaalvorm

$F_2 = xy + xy' + x'y + x'y'$. Er zijn 4 mintermen. In drie variabelen x , y en z hebben we

$F_3 = xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$.

Er zijn dus 8 mintermen.

Zoals gemakkelijk is in te zien ontstaat F_3 uit F_2 door de formule

$F_3 = z F_2 + z' F_2$. Algemener geldt de volgende stelling.

Stelling 3-3. De komplette disjunctieve normaalvorm F_n in n variabelen $x_1, \dots, x_n$ volgt uit die voor $n - 1$ variabelen uit de betrekking

$$F_n = x_n F_{n-1} + x'_n F_{n-1},$$

waarbij $n \geq 2$. Voor $n = 1$ geldt

$$F_1 = x_1 + x'_1.$$

Bewijs. $x_n F_{n-1} + x'_n F_{n-1}$ is een booleaanse functie in n variabelen die 2^n verschillende mintermen bevat. Deze functie is dus de komplette disjunctieve normaalvorm in n variabelen en geven we aan met F_n .

Stelling 3-4. Voor elk natuurlijk getal n geldt $F_n = 1$.

Bewijs. Met volledige inductie.

De bewering is juist voor $n = 1$, aangezien $F_1 = x_1 + x'_1 = 1$.

Veronderstel dat de bewering is aangetoond voor $1, 2, 3, \dots, n$. Voor $n + 1$ hebben we volgens de vorige stelling

$$F_{n+1} = x_{n+1} F_n + x'_{n+1} F_n = (x_{n+1} + x'_{n+1}) F_n$$

voor $n+1 \geq 2$ (ofwel $n \geq 1$). Nu is $x_{n+1} + x'_{n+1} = 1$ en volgens de inductie veronderstelling eveneens $F_n = 1$. Ook voor $n + 1$ geldt dus $F_{n+1} = 1$.

De bewering is dus juist voor elk natuurlijk getal n .

Opmerking. We hebben afgesproken dat een disjunctieve normaalvorm niet vereenvoudigd kan worden. De komplette disjunctieve normaalvorm kan volgens de vorige stelling tot 1 vereenvoudigd worden. Voor deze speciale vorm wordt dus een uitzondering gemaakt.

Als aan de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ op een willekeurige manier ^{de waarden} 0 of 1 wordt toegekend dan is elke minterm gelijk aan 0 of 1. De waarde van de minterm zal 0 zijn als minstens één variabele x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in de minterm voorkomt zonder aksent en $x_i = 0$ of als minstens één x_i in de minterm met aksent voorkomt en $x_i = 1$. De waarde van de minterm zal 1 zijn als voor alle variabelen x_i geldt: x_i komt voor zonder aksent en $x_i = 1$ of x_i komt voor met aksent en $x_i = 0$.

De kans dat de minterm de waarde 1 heeft bij een willekeurige verdeling van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ is dus veel kleiner dan de kans dat de waarde 0 is. De waarden 0 en 1 kunnen op 2^n verschillende manieren over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ verdeeld worden en slechts één van de 2^n combinaties is zal de waarde 1 opleveren voor een willekeurige minterm. In drie variabelen kunnen de waarden 0 en 1 als volgt verdeeld worden

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), \\ (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).$$

De minterm $xy'z'$ is slechts voor de vijfde combinatie gelijk aan 1, voor alle overige 7 combinaties gelijk aan 0. Aangezien in een komplette disjunctieve normaalvorm van n variabelen alle mintermen voorkomen is bij een willekeurige verdeling van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ slechts één minterm gelijk aan 1, terwijl de overige $2^n - 1$ bij die gegeven combinatie gelijk aan 0 zijn. We weten reeds (stelling 3-4) dat elke F_n gelijk aan 1 is, welke waarde de variabelen ook mogen hebben. Uit het voorgaande blijkt echter, dat indien alle variabelen de waarden 0 of 1 hebben, slechts één term die waarde 1 oplevert. We formuleren dit resultaat nog eens in de volgende stelling.

Stelling 3-3. Als aan de n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ op een willekeurige manier de waarde 0 of 1 wordt toegekend dan is er precies één minterm in de komplette disjunctieve normaalvorm F_n in n variabelen die de waarde 1 aanneemt, terwijl de overige $2^n - 1$ alle de waarde 0 aannemen.

Bewijs. Met behulp van volledige inductie.

Voor $n = 1$ is de bewering juist. Er zijn namelijk 2 mintermen in F_1 , te weten x_1 en x'_1 en als aan x_1 de waarde 0 of 1 wordt toegekend is precies één van deze termen 1 en de andere is 0.

Veronderstel nu dat het gestelde is aangetoond voor $1, 2, 3, \dots, n$. In F_n komt dus één minterm voor die de waarde 1 heeft bij willekeurige verdeling van 0 en 1 over de variabelen. Aangezien volgens stelling 3-3 geldt $F_{n+1} = x_{n+1} F_n + x'_{n+1} F_n$, is bij willekeurige verdeling van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ook slechts één minterm in F_{n+1} gelijk aan 1, namelijk de term uit F_n vermenigvuldigd met x_{n+1} als $x_{n+1} = 1$ of de term uit F_n vermenigvuldigd met x'_{n+1} als $x_{n+1} = 0$. Er ontstaat zo slechts één minterm die de waarde 1 aanneemt, terwijl alle overige termen gelijk aan 0 zijn.

De bewering is dus juist voor elke n .

Het is duidelijk dat ook voor een willekeurige Booleaanse functie in n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ de disjunctieve normaalvorm bij willekeurige verdeling van 0 en 1 over de variabelen hoogstens één minterm de waarde 1 kan aan nemen. Aangezien niet alle mintermen hoeven voor te komen, is het niet zeker dat er werkelijk een minterm in de vorm aanwezig is die bij een gegeven combinatie van 0 en 1 over de variabelen de waarde 1 aanneemt. Omgekeerd kunnen we echter wel het volgende zeggen: als voor een gegeven verdeling van 0 en 1 over de n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bekend is dat een Booleaanse functie f de waarde 1 aanneemt dan weten we zeker dat de minterm uit F_n die voor die verdeling de waarde 1 oplevert in de disjunctieve normaalvorm van f voorkomt. Als we meer van die informatie verkrijgen, dan kunnen we van meer mintermen zeggen dat ze voorkomen in de disjunctieve normaalvorm van f .

Voorts kunnen we ook wat hebben aan de informatie dat de functie de waarde 0 aanneemt voor een gegeven verdeling. We weten dan namelijk zeker dat de minterm die in F_n voor die gegeven verdeling de waarde 1 aanneemt niet mag voorkomen in de disjunctieve normaalvorm van f omdat f juist 0 is voor die combinatie.

Als zo 2^n uitspraken gedaan worden voor welke verdeling van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ de functie f de waarde 1 of de waarde 0 aanneemt, dan kunnen we van elke minterm uit F_n nagaan of deze in de disjunctieve normaalvorm voorkomt of niet.

(van f)

Voorbeeld. Van een functie f van twee variabelen x en y is bekend dat

$f = 0$ voor $x = 0, y = 0$ en voor $x = 1, y = 1$ terwijl

$f = 1$ voor $x = 0, y = 1$ en $x = 1, y = 0$.

De minterm $x'y$ komt niet voor in de disjunctieve normaalvorm van f omdat deze in F_2 voor $x = 0, y = 0$ de waarde 1 oplevert en $f = 0$ voor deze combinatie. Zo komt ook xy niet voor. Daarentegen moeten de mintermen $x'y$ en xy' wel in de disjunctieve normaalvorm van f voorkomen. Van alle mintermen uit F_2 is nu nagegaan welke in f voorkomen en welke niet. We kunnen f dus schrijven als $f = x'y + xy'$. Geen andere functie van twee variabelen voldoet aan bovengenoemde voorwaarden en we zien dat door deze 4 kondities f volkomen bepaald is. Als namelijk de disjunctieve normaalvorm van een functie bekend is is de functie zelf volkomen bepaald.

We recapituleren deze resultaten in de volgende stelling

Stelling 3-4. Elke Booleaanse functie f van n variabelen is volkomen bepaald door de waarden die de functie aanneemt voor de 2^n verdelingen van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Rest nog de vraag of een functie twee verschillende disjunctieve normaalvormen kan hebben. Dit kan zeker niet het geval zijn aangezien in beide vormen dan niet dezelfde mintermen voorkomen. Voor een bepaalde verdeling van 0 en 1 over de variabelen kan de functie dan via de ene representatie de waarde 1 aannemen en via de andere de waarde 0, hetgeen onzinnig is.

Oefeningen.

- 1) Schrijf de volgende functies in een disjunctieve normaalvorm met zo weinig mogelijk variabelen.
 - a) $x + y$;
 - b) $xyz + xz'(x'+z)$;
 - c) $(x+y)(y+z)(x+z)$.
- 2) Bepaal welke minterm in de F_3 van de variabelen x, y en z de waarde 1 aanneemt voor
 - a) $x = 1, y = 1, z = 0$;
 - b) $x = 0, y = 0, z = 1$;
 - c) $x = 1, y = 0, z = 1$.

3) Hoeveel verschillende Booleaanse funkties van 2 variabelen zijn er?

4) Bepaal de Booleaanse funktie f uit de volgende tabel

Rij	x	y	z	f
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

Uit rij 4 is af te lezen dat $f = 1$ voor $x = 0, y = 1, z = 1$. Vereenvoudig de gevonden funktie indien dit mogelijk is.

5) Bepaal de Booleaanse funktie f van drie variabelen x, y en z die gelijk aan 1 is indien precies twee van de variabelen gelijk aan nul zijn, terwijl in de overige gevallen de funktiewaarde 0 is.

§4. De konjunktieve normaalvorm van een Booleaanse funktie.

In de vorige paragraaf hebben we een normaalvorm beschouwd die bestaat uit een som van produkten. De normaalvorm die nu ter sprake komt is een produkt van sommen. Daarmee is deze vorm de duale versie van de normaalvorm uit §3. Alle stellingen die we daar hebben geformuleerd en bewezen kunnen we dualiseren, als we maar "duale namen" invoeren voor minterm, disjunktieve normaalvorm, etc. Het bewijs van de stellingen hoeft niet te worden gegeven vanwege het dualiteitsprincipe. Voor de volledigheid zullen we alle duale definities en stellingen weergeven.

Definitie 4-1. Een maxterm van n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ is een lineaire faktor waarin alle variabelen, al of niet voorzien van een aksent, voorkomen.

We kunnen ook zeggen dat een maxterm de duale vorm van een minterm is. In de drie variabelen x, y en z is $(x+y+z')$ een maxterm.

Indien een Booleaanse funktie f van n variabelen ontbonden is in lineaire factoren, waarbij alle factoren maxtermen zijn van n variabelen, dan zeggen we dat f geschreven is in konjunktieve normaalvorm in n variabelen.

Een konjunktieve normaalvorm is de duale van een disjunktieve normaalvorm.

De funktie $f = (a+x+y)(a+x'+y)(a'+x+y)$ is geschreven in de konjunktieve normaalvorm in de drie variabelen a, x en y ; de funktie $g = x(x'+y')$ is echter niet in de konjunktieve normaalvorm geschreven.

Door de faktor x te vervangen door $x = x+yy' = (x+y)(x+y')$ kunnen we g in de konjunktieve normaalvorm schrijven.

Stelling 4-1. Elke Booleaanse funktie van n variabelen kan in een konjunktieve normaalvorm in n variabelen worden geschreven.

Stelling 4-2. Er zijn precies 2^n verschillende maxtermen van de n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definitie 4-1. De komplete konjunktieve normaalvorm G_n in n variabelen is die konjunktieve normaalvorm die precies 2^n maxtermen van n variabelen heeft.

We kunnen ook zeggen dat G_n de duale vorm is van F_n uit de vorige paragraaf.

Stelling 4-3. De complete konjunktieve normaalvorm G_n in n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ volgt uit die voor de $n-1$ variabelen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ uit de betrekking

$$G_n = (x_n + G_{n-1})(x'_n + G_{n-1})$$

waarbij $n \geq 2$. Voor $n = 1$ geldt

$$G_1 = x_1 x'_1.$$

Stelling 4-4. Voor elk natuurlijk getal n geldt $G_n = 0$.

Stelling 4-5. Als aan de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ op een willekeurige manier de waarden 0 en 1 wordt toegekend dan is er precies één maxterm in de complete konjunktieve normaalvorm G_n in n variabelen die de waarde 0 aanneemt, terwijl de overige $2^n - 1$ maxtermen alle de waarde 1 aannemen.

Stelling 4-6. Elke Booleaanse functie f van n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ is volkomen bepaald door de waarden die de functie aanneemt voor de 2^n verdelingen van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Deze stelling is dezelfde als stelling 3-6. De stelling wordt zelf-duaal genoemd.

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat aan de hand van 2^n gegevens de disjunktieve normaalvorm van een functie van n variabelen kan worden bepaald. We kunnen nu ook de konjunktieve normaalvorm vaststellen. Als namelijk bekend is dat $f = 0$ voor een zekere verdeling van 0 en 1 over de variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$, dan komt de maxterm, die ervoor zorgt dat G_n de waarde 0 aanneemt voor die gegeven verdeling zeker voor in de konjunktieve normaalvorm van f .

Voorbeeld 4-1. Van een functie f van twee variabelen x en y is bekend dat $f = 0$ voor $x = 0, y = 0$ en voor $x = 0, y = 1$, terwijl $f = 1$ voor $x = 1, y = 1$ en voor $x = 1, y = 0$. We bepalen de konjunktieve normaalvorm van f . De maxtermen $(x+y)$ en $(x+y')$ komen in deze normaalvorm voor, omdat voor $x = 0, y = 0$ de eerste faktor gelijk aan 0 is en voor $x = 0, y = 1$ de tweede. De functie f kan dus geschreven worden als

$$f = (x+y)(x+y').$$

Bij het bepalen van een functie f van n variabelen met behulp van 2^n gegevens, kan men dus de disjunctieve normaalvorm en de conjunctieve normaalvorm van f zoeken. De twee methodes leiden natuurlijk tot dezelfde functie. Als het er niet toe doet in welke vorm f geschreven is kan men zich afvragen of de methode via de disjunctieve normaalvorm te prefereren is boven die via de conjunctieve normaalvorm. Aan de hand van het volgende voorbeeld zullen we dit proberen duidelijk te maken.

Voorbeeld 4-2. Bepaal de functies f en g van drie variabelen x , y en z aan de hand van de volgende gegevens.

Rij	x	y	z	f	g
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	1
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	1
6	1	0	1	0	0
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	0	1

Oplossing. De functie f is voor drie combinaties gelijk aan 1 (Rij 1, 3 en 5).

De disjunctieve normaalvorm van f luidt dus $f = x'y'z' + x'yz' + xy'z'$.

We kunnen ook de conjunctieve normaalvorm van f opschrijven. Daartoe letten we op de rijen waarin de functiewaarde van f gelijk aan 0 is.

Uit de tweede rij lezen we af dat voor $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ de waarde van f gelijk aan 0 is. De maxterm $(x+y+z')$ is ook voor deze waarden van x , y en z gelijk aan 0. Daarom komt deze maxterm voor in de conjunctieve normaalvorm van f . Voor rij 4, 6, 7 en 8 houden we een analoge redenering. De conjunctieve normaalvorm van f luidt dus

$$f = (x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z)(x'+y'+z').$$

Als het alleen gaat om de bepaling van f dan geniet de eerste methode (en vorm) de voorkeur.

Bij de functie g zien we dat slechts in rij 6 en 7 de waarden 0 voorkomen.

Hier heeft de conjunctieve normaalvorm de voorkeur omdat deze dan ook twee maxtermen bevat. Voor g vinden we

$$g = (x'+y+z')(x'+y'+z) = x' + yz + y'z'.$$

Oefeningen.

1) Schrijf de volgende funkties in een konjunktieve normaalvorm met zo weinig mogelijk variabelen.

- a) xy ;
- b) $xy + x'y'$;
- c) $(x+y)(y+z)(x+z)$.

2) Bepaal welke maxterm in de G_3 van de variabelen x , y en z de waarde 0 aanneemt voor

- a) $x = 1, y = 1, z = 0$;
- b) $x = 0, y = 0, z = 1$;
- c) $x = 1, y = 0, z = 1$.

3) Bepaal de Booleaanse funkties f , g en h uit de volgende tabel, door de konjunktieve of disjunktieve normaalvorm op te schrijven. Vereenvoudig de gevonden funkties indien dit mogelijk is.

Rij	x	y	z	f	g	h
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	0	1
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	0	0
7	1	1	0	1	1	1
8	1	1	1	1	0	1

4) Bepaal de Booleaanse funktie f van drie variabelen x , y en z . die gelijk aan 1 is dan en slechts dan als er precies twee variabelen gelijk aan 0 of 1 zijn.

III

Propositie logika

§ 1

De Booleaanse algebra met twee elementen.

De Booleaanse algebra die we in het vorige hoofdstuk hebben gedefinieerd wordt in dit hoofdstuk toegepast op een onderwerp uit de logika. We zullen ons in deze paragraaf eerst bezig houden met een zeer eenvoudige Booleaanse algebra, namelijk een Booleaanse algebra die maar twee elementen bevat. Het ligt voor de hand om die elementen dan maar 0 en 1 te noemen, omdat deze eenheidselementen toch moeten voorkomen. De twee binaire operaties, die we weer aan zullen geven met " + " en " . ", voldoen per definitie aan de regels die in de volgende tafels staan aangegeven.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Het kost weinig moeite om aan te tonen dat de verzameling $\{0,1\}$ tesamen met de operaties " + " en " . " een Booleaanse algebra vormt. De axioma's A1 t/m A4 uit II - § 2 moeten daartoe geverifieerd worden.

A-1. We moeten nagaan dat $ab = ba$ en $a+b = b+a$ voor alle a en b uit de verzameling $\{0,1\}$. In de volgende tabel wordt dit aangetoond met gebruikmaking van de regels voor " + " en " . ".

a	b	a + b	b + a	ab	ba
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A-2. De eenheidselementen zijn 0 en 1, respektievelijk ten opzichte van de operaties " + " en " . ", hetgeen blijkt uit de rekenregels voor " + " en " . ".

A-3. Voor alle a,b en c moet gelden $a(b+c) = ab+ac$ en $a+bc = (a+b)(a+c)$. Dit kan weer aangetoond worden door een tabel

a	b	c	b+c	a(b+c)	ab	ac	ab + ac
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

De vijfde en achtste kolom zijn aan elkaar gelijk zodat voor elke a,b en c geldt $a(b+c) = ab + ac$. Op analoge wijze toont men $a+bc = (a+b)(a+c)$ aan.

A-4. Met $0' = 1$ en $1' = 0$ is ook aan het vierde axioma voldaan.

Oefeningen

- 1) Kan een Booleaanse algebra precies één element bevatten?
- 2) Kan een Booleaanse algebra juist drie elementen bevatten?

§2 Proposities en waarheidswaarden.

Onder een propositie zullen we verstaan de beweringsinhoud van een zinvolle konstaterende volzin. Een propositie is waar of niet waar. Propositionen zullen we aangeven met hoofdletters P, Q, R, ---. Voorbeelden van propositionen zijn

- P de Gaulle is overleden;
- Q 7 is een priemgetal;
- R als het vandaag vrijdag is, dan is het morgen zaterdag.

Deze drie propositionen zijn waar. De volgende uitspraken zijn niet waar, maar worden zeker als propositionen beschouwd.

- S Londen ligt in Frankrijk;
- T een driehoek heeft vier zijden;
- U de politie is mijn beste kameraad.

Volzinnen als "wilt u opletten?" en "geef dat boek hier" zijn geen propositionen.

Naast P kennen we ook de propositie P' , de ontkenning van P. Als P waar is, dan is P' vals. Als P vals is, dan is P' waar. In bovenstaande voorbeelden luidt Q' : "het is niet zo dat 7 een priemgetal is", ofwel "7 is geen priemgetal".

Het symbool "0" zullen we associëren met vals en het symbool "1" met waar. We kennen aan elke propositie P een waarheidswaarde p toe, zo dat $p = 0$ als P vals is en $p = 1$ als P een ware propositie is. De waarheidswaarde van P' (de ontkenning van P) geven we aan met p' . We noemen p' het komple-

ment van p . Uit het voorgaande blijkt onmiddellijk dat $p' = 0$ als $p = 1$ en $p' = 1$ als $p = 0$. We geven dit weer in de volgende waarheidstafel

<u>Tafel 2-1.</u>	P	P'
	0	1
	1	0

In de eerste rij staan twee proposities en in de overige de waarheidswaarden. Dezelfde informatie kan verkregen worden als in bovenstaande tafel de hoofdletters door kleine letters worden vervangen. Aan de hand van deze tafel kan men eenvoudig verifiëren dat P en $(P')'$ dezelfde waarheidswaarden hebben; d.w.z. $p = (p')'$ voor elke propositie P . We noemen de proposities P en $(P')'$ gelijkwaardig en geven dit aan met

$$P \equiv (P')'.$$

In woorden kan men dit aangeven door bijvoorbeeld te zeggen dat de propositie "de Gaulle is overleden" gelijkwaardig is met de propositie "het is niet zo dat de Gaulle niet overleden is".

Proposities kunnen we samenstellen door middel van voegwoorden tot samengestelde proposities. De propositie "het regent en de straat is nat" is samengesteld uit twee proposities door het voegwoord "en". Als we de proposities voorstellen door letters dan geven we het voegwoord "en" aan door het konnektief " $\wedge$ ". We noemen $P \wedge Q$ de conjunctie van P en Q . We zijn natuurlijk geïnteresseerd in de waarheidswaarde van deze nieuwe propositie. We spreken daarvoor af dat de samengestelde propositie $P \wedge Q$ waar is als P en Q beide waar zijn en vals is in de overige gevallen. Met behulp van een waarheidstafel kunnen we dit overzichtelijk weergeven.

Tafel 2-2.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Graag willen we nu de waarheidswaarden van de propositie $P \wedge Q$ uitdrukken in p en q , de waarheidswaarden van respectievelijk P en Q . Als we ons laten inspireren door de vorige hoofdstukken en de eerste paragraaf van dit hoofdstuk dan ligt het voor de hand de waarheidswaarde van $P \wedge Q$ te definiëren door $p.q$. We introduceren dus naast het konnektief " $\wedge$ ", werkend op proposities, een operatie " $.$ ", werkend op waarheidswaarden, volgens de volgende regels

Tafel 2-3.

.	0	1
0	0	0
1	0	1

De waarheidswaarden kunnen alleen maar 0 en 1 zijn. De operatie " $.$ " is een binaire operatie op de verzameling $\{0,1\}$ van waarheidswaarden van proposities. Is deze binaire operatie kommutatief? D.w.z. geldt voor elk paar waarheidswaarden p en q dat $p.q = q.p$? Dit kan eenvoudig geïnterpreteerd worden door voor p en q alle combinaties van 0 en 1 in te vullen. Het antwoord is bevestigend. Dit heeft voor het konnektief " $\wedge$ " de consequentie dat $P \wedge Q$ en $Q \wedge P$ dezelfde waarheidswaarden hebben voor elke keuze van P en Q , waar of vals. We noemen $P \wedge Q$ en $Q \wedge P$ gelijkwaardig en geven dit aan met

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$$

Uit de definitie van het konnektief " $\wedge$ " blijkt overigens al dat P en Q volledig symmetrisch zijn. Voor $p.q$ zullen we in het vervolg meestal pq

schrijven.

Met het voegwoord "of" kunnen eveneens proposities worden samengesteld. De propositie "de koffie is op of de automaat is defekt" is samengesteld uit twee proposities. Als we de proposities voorstellen door letters, dan geven we het voegwoord "of" aan door het konnektief " $\vee$ ". We noemen $P \vee Q$ de disjunctie van P en Q . We veronderstellen dat we onder $P \vee Q$ steeds verstaan "P of Q of beide". We spreken af dat $P \vee Q$ vals is als P en Q beide vals zijn en waar is in de overige gevallen. De waarheidstafel voor deze propositie ziet er dan als volgt uit

Tafel 2-4.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

De waarheidswaarde van $P \vee Q$ zullen we aangeven met $p+q$, hetgeen weer gesuggereerd wordt door bovenstaande tabel. Naast het konnektief " $\vee$ ", werkend op proposities, kennen we dus een operatie " $+$ ", werkend op waarheidswaarden, volgens de volgende regels

Tafel 2-5.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

De operatie " $+$ " is een binaire operatie op de verzameling $\{0,1\}$ der waarheidswaarden van proposities. De operatie is kommutatief, zoals gemakkelijk uit de regels in tabel 2-5 voor de operatie is af te leiden, d.w.z.

$p+q = q+p$ voor elk paar waarheidswaarden p en q . Hiermee is ook duidelijk dat $P \vee Q$ en $Q \vee P$ gelijkwaardige proposities zijn; we geven dit aan met

$$P \vee Q \equiv Q \vee P.$$

We hebben in tabel 2-3 en tabel 2-5 nu twee binaire operaties " $+$ " en " $\cdot$ " op de verzameling der waarheidswaarden $\{0,1\}$ gedefinieerd. Met behulp van §1 van dit hoofdstuk kunnen we konkluderen dat de volgende stelling be-
wezen is.

Stelling 2-1. De verzameling der waarheidswaarden $\{0,1\}$ der proposities vormt tesamen met de binaire operaties " $+$ " en " $\cdot$ ", die in tabel 2-3 en tabel 2-5 zijn gedefinieerd, een Booleaanse algebra.

Deze Booleaanse algebra bevat slechts twee elementen, 0 en 1. De variabelen $p, q, r, \dots$, die uitsluitend de waarden 0 of 1 kunnen aannemen, stellen waarheidswaarden van proposities $P, Q, R, \dots$ voor. Naast p heeft het komplement p' betekenis gekregen door de ontkenning P' van P .

De rekenregels voor Booleaanse funkties van de variabelen $p, q, r, \dots$ hebben we leren kennen in hoofdstuk II. Zo is bekend dat $p(q+r) = pq + pr$ voor alle p, q , en r die elementen zijn van een Booleaanse algebra. Wat voor konklusie kunnen we hieruit trekken als $p, q, r, \dots$ waarheidswaarden voorstellen van proposities $P, Q, R, \dots$? Kennelijk dat de proposities $P \wedge (Q \vee R)$ en $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ gelijkwaardig zijn. Dit geven we aan met

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Alle eigenschappen van de Booleaanse funkties met als variabelen waarheidswaarden van proposities kunnen dienen om analoge relaties af te leiden voor samengestelde proposities. We behoeven slechts de tekens " $+$ ", " $\cdot$ " en " $'$ " te vervangen door de tekens " $\vee$ ", " $\wedge$ " en " $\equiv$ " en de kleine letters

door de korresponderende hoofdletters.

We zullen nu twee konnektieven bespreken, die een zeer belangrijke plaats innemen in de logika, namelijk de implikatie en de wederzijdse implikatie.

De implikatie wordt weergegeven door

$$P \rightarrow Q$$

en wordt gelezen als "als P, dan Q", ofwel "P impliceert Q", waarbij P en Q proposities zijn. De implikatie $P \rightarrow Q$ is weer een propositie en men kan zich afvragen of deze propositie waar is of vals bij gegeven P en Q. Voor de implikatie geldt de regel dat $P \rightarrow Q$ vals is als P waar is en Q vals en dat ze waar is in alle andere gevallen. De waarheidstafel ziet er dus als volgt uit

<u>Tafel 2-6.</u>	P	Q	$P \rightarrow Q$
	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

Men dient de implikatie slechts op te vatten als een samengestelde propositie waarvan de waarheidswaarden in bovenstaande tafel zijn gedefinieerd. Het is niet zo dat de propositie Q logies uit de propositie P kan worden afgeleid, hetgeen de omschrijving "als P, dan Q" zou kunnen suggereren. Men spreekt hier van een materiele implikatie in tegenstelling tot een formele implikatie, waarbij een zeker formeel verband tussen P en Q een voorwaarde is voor het toekennen van een betekenis aan een implikatie. In $P \rightarrow Q$ noemt men P het antecedens en Q het consequens.

Het is niet moeilijk een andere representatie voor de implikatie $P \rightarrow Q$ te vinden. Met behulp van de theorie uit het vorige hoofdstuk kunnen we uit tabel 2-6 de disjunctieve normaalvorm bepalen van een functie in de variabelen p en q , de waarheidswaarden van P en Q . Deze normaalvorm luidt $p'q' + p'q + pq$ en deze functie kan worden vereenvoudigd tot $p' + q$. Bij deze Booleaanse functie hoort echter de samengestelde propositie $P' \vee Q$ en deze propositie blijkt dus dezelfde waarheidstafel te hebben als $P \rightarrow Q$. We noemen $P \rightarrow Q$ en $P' \vee Q$ gelijkwaardige proposities en we schrijven

$$P \rightarrow Q \equiv P' \vee Q.$$

In deze betekenis kan men de implikatie het beste opvatten. De propositie "als de kat van honk is, dan dansen de muizen op tafel" kan dus, in zijn logiese betekenis, vervangen worden door de propositie "de kat is thuis of de muizen dansen op tafel, of beide".

We kunnen de pijl " $\rightarrow$ " ook definiëren voor de Booleaanse variabelen als we hem definiëren als een binaire operatie op de verzameling der waarheidswaarden, die aan elk paar p en q de waarheidswaarde $p' + q$ toevoegt, dus $p \rightarrow q = p' + q$. Deze binaire operatie is niet kommutatief, aangezien voor $p = 1, q = 0$, $p \rightarrow q = p' + q = 0$ terwijl $q \rightarrow p = q' + p = 1$, zodat niet voor elke p en q geldt $p \rightarrow q = q \rightarrow p$.

De wederzijdse implikatie wordt weergegeven door

$$P \leftrightarrow Q$$

en wordt gelezen als "P dan en slechts dan als Q", of als "een nodige en voldoende voorwaarde voor P is Q". De wederzijdse implikatie is weer een propositie die waar is als P en Q beide waar zijn of beide vals zijn. In de overige gevallen is ze vals. De waarheidstafel ziet er als volgt uit

<u>Tafel 2-7.</u>	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

De Booleaanse funktie $p'q' + pq$ kan eveneens geassocieerd worden met tabel 2-7. Hieruit volgt dat $P \leftrightarrow Q \equiv (P' \wedge Q') \vee (P \wedge Q)$. Een meer bruikbare representatie wordt gegeven door de propositie $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$. Als we de waarheidswaarde van deze samengestelde propositie bepalen dan blijkt inderdaad dat ze gelijkwaardig is met $P \leftrightarrow Q$. In tabel 2-8 wordt dit aangetoond.

Tafel 2-8.	P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
	0	0	1	1	1
	0	1	1	0	0
	1	0	0	1	0
	1	1	1	1	1

In de vorm $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ hebben we de wederzijdse implicatie vaak gebruikt bij wiskundige bewijzen. We kunnen " $\leftrightarrow$ " weer opvatten als een binaire operatie op de verzameling der waarheidswaarden die aan elk paar p en q de waarheidswaarde $p'q' + pq$ toevoegt, dus $p \leftrightarrow q = p'q' + pq$. Deze operatie is kommutatief.

Met behulp van de konnektieven " $\vee$ ", " $\wedge$ ", " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ " en " $'$ " kunnen zeer gekompliceerde proposities worden opgebouwd. De bijbehorende Booleaanse funktie van de waarheidswaarden kan daarbij gebruikt worden om ingewikkelde proposities te vereenvoudigen. Als de Booleaanse funktie, gevormd aan de hand van een samengestelde propositie, reduceert tot 1 dan noemen we de betreffende propositie een tautologie. Een eenvoudig voorbeeld van een tautologie is de propositie $P \vee P'$. De Booleaanse funktie is in dit geval immers $p + p'$ en deze uitdrukking reduceert tot 1. Als de Booleaanse funktie reduceert tot 0 noemen we de korresponderende propositie een kontradiktie. Een eenvoudig voorbeeld van een kontradiktie is de propositie $P \wedge P'$. De waarheidstafel van een tautologie bevat in de laatste kolom uitsluitend het symbool 1, terwijl de waarheidstafel van een kontradiktie uitsluitend het symbool 0 bevat in de laatste kolom.

Oefeningen.

- 1) Laat P de propositie "het is koud" en Q de propositie "het regent" zijn. Geef een omschrijving, in woorden, van de volgende samengestelde proposities

- a) $P \rightarrow Q'$;
 - b) $P \wedge Q' \rightarrow P$;
 - c) $(P \vee Q)'$;
 - d) $(P' \wedge Q') \vee (P \wedge Q)$.
- 2) Schrijf elk van de volgende zinnen in symbolen met behulp van P en Q uit de vorige oefening.
- a) het regent en het is koud ;
 - b) het regent maar het is niet koud ;
 - c) het is niet zo dat het niet regent of dat het koud is ;
 - d) het regent noch het is koud ;
 - e) het is niet waar dat het niet regent en dat het niet koud is.
- 3) Ga na welke van de volgende samengestelde proposities waar of vals is.
- a) als $3 + 2 = 7$ dan is $4 + 4 = 8$;
 - b) het is niet waar dat $2 + 2 = 5$ dan en slechts dan als $4 + 4 = 10$;
 - c) Parijs ligt in Engeland of London ligt in Frankrijk;
 - d) Als Parijs in Engeland ligt, dan ligt London in Frankrijk;
 - e) het is niet zo dat $1 + 1 = 3$ of $2 + 1 = 3$.
- 4) Stel de waarheidstafel op van de volgende samengestelde proposities
- a) $(P \wedge Q)' \vee (Q \leftrightarrow P)'$;
 - b) $[P \rightarrow (Q' \vee R)] \wedge [Q \vee (P \leftrightarrow R')]'$.
- 5) Ga na welke van de volgende samengestelde proposities een tautologie is.
- a) $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow P$;
 - b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow Q \wedge (P \vee R)]$.
- 6) Toon aan met behulp van waarheidstafels dat
- a) $(P \wedge Q) \rightarrow R \equiv (P \wedge R') \rightarrow Q'$;
 - b) $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

§3 Kwantoren.

In de vorige paragraaf hebben we ons bezig gehouden met proposities en het samenstellen daarvan. We hebben ons niet afgevraagd hoe de proposities gekonstrueerd waren. De volgende proposities hebben alle de eigenschap dat er een uitspraak wordt gedaan over een zeker aantal mensen, dieren, getallen.

- P1 alle mensen zijn sterfelijk;
- P2 sommige dieren zijn zoogdieren;
- P3 er bestaat geen reële x zodat $x^2 + 1 = 0$.

We willen nu aangeven dat er in proposities, zoals hierboven, sprake kan zijn van een bepaald aantal objecten. We voeren daartoe enige nieuwe begrippen in.

Laat A een verzameling zijn. Een propositionele funktie is een uitdrukking, die we aangeven met $P(x)$, met de eigenschap dat $P(a)$ een propositie is (waar of vals, maar niet beide) voor elke $a \in A$.

Voorbeeld 3-1. Als $P(x)$ betekent "x is een priemgetal", dan is $P(x)$ een propositionele funktie op de verzameling der natuurlijke getallen. $P(7)$ is een ware propositie, $P(9)$ is vals.

Voorbeeld 3-2. Als $Q(x)$ betekent "x is een Nederlander", dan is $Q(x)$ een propositionele funktie op de verzameling van alle mensen. $Q(\text{Nixon})$ is een valse propositie, $Q(\text{Luns})$ is waar.

Als $P(x)$ een propositionele funktie is op de verzameling A , dan zijn er drie mogelijkheden:

- 1) $P(x)$ is waar voor elke $x \in A$;
- 2) $P(x)$ is waar voor sommige $x \in A$;
- 3) $P(x)$ is vals voor elke $x \in A$.

We introduceren nu het begrip "kwantor". Als $P(x)$ een propositionele funktie is op een verzameling A dan is

$$(\forall x \in A) P(x)$$

een propositie die als volgt wordt gelezen "voor elk element x uit A geldt $P(x)$ ", of kortweg "voor elke x geldt $P(x)$ ". Het symbool " $\forall$ " wordt de universele kwantor genoemd. Merk op dat $P(x)$ zelf geen propositie is, aangezien de variabele x niet gespecificeerd is. Bij de propositionele functie " $x^2 > 0$ " kan pas na specificatie van x worden nagegaan of de uitspraak waar of vals is. Voorzien van de kwantor $\forall x \in R$, waarin R de verzameling der reële getallen is, wordt de uitdrukking $(\forall x \in R)(x^2 > 0)$ een propositie (met waarheidswaarde 0). Soms laten we, als dit tenminste niet tot dubbelzinnigheden leidt, het domein A weg in de formule $(\forall x \in A) P(x)$. Dan schrijven we kortweg $\forall x P(x)$. Ook schrijven we bijvoorbeeld $\forall x > 0 (2x > 0)$, hetgeen gelezen kan worden als "voor elke positieve x is $2x$ positief".

Voorbeeld 3-3. $(\forall x \in C)(x^2 - 4 = (x-2)(x+2))$, waarin C de verzameling der komplekse getallen is, is een ware propositie en wordt gelezen als "voor elke komplexe x geldt $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ".

Voorbeeld 3-4. Als $P(x)$ betekent " x is sterfelijk" en A is de verzameling der levende mensen dan is $(\forall x \in A) P(x)$ een ware propositie en wordt gelezen als "alle mensen zijn sterfelijk".

Naast de methode die aangeeft dat een bepaalde uitspraak voor alle x geldt, kennen we er ook een die uitdrukt dat een uitspraak voor sommige x geldt.

Als $P(x)$ een propositionele functie is op een verzameling A dan is

$$(\exists x \in A) P(x)$$

een propositie die als volgt wordt gelezen "er bestaat een element x uit A waarvoor $P(x)$ geldt" of kortweg "er is een x zodat $P(x)$ geldt". Het symbool " $\exists$ " wordt de eksistentiële kwantor genoemd. Ook in bovenvermelde formule laten we het domein wel eens weg en schrijven we $\exists x P(x)$.

Voorbeeld 3-5. Laat $P(x)$ de propositionele funktie uit voorbeeld 3-1 zijn en A de verzameling der natuurlijke getallen kleiner dan 10, dan is $(\exists n \in A) P(n)$ een ware propositie en wordt gelezen "er bestaat een getal onder de 10 dat priemgetal is", of "sommige getallen onder de 10 zijn priemgetallen".

Voorbeeld 3-6. Als $Q(x)$ de propositionele funktie uit voorbeeld 3-2 is en A de verzameling der wiskundigen, dan wordt $(\exists x \in A) Q(x)$ gelezen als "er bestaat een Nederlandse wiskundige", of "sommige wiskundigen zijn Nederlanders".

We spreken af dat "sommige" ook mag slaan op één element; "sommige" betekent hier "minstens één".

In de vorige paragraaf is de ontkenning P' van de propositie P ingevoerd. Ook hier zullen we ons afvragen wat de ontkenning is van een propositie die kwantoren bevat. Daartoe zullen we eerst afspreken wat we verstaan onder $P'(x)$. Onder $P'(x)$ verstaan we de propositionele funktie die ontstaat als vóór de propositionele funktie $P(x)$ de zinsnede "het is niet zo dat" geplaatst wordt. Bij $P(x)$: "x is sterfelijk" is $P'(x)$: "het is niet zo dat x is sterfelijk", of in dit geval "x is onsterfelijk". $P'(x)$ wordt de ontkenning van de propositionele funktie $P(x)$ genoemd.

De ontkenning van de propositie "alle mensen zijn sterfelijk" is "het is niet zo dat alle mensen sterfelijk zijn". D.w.z. de ontkenning kan ook gelezen worden als "sommige mensen zijn onsterfelijk", of ook "er bestaat minstens één onsterfelijk mens". De oorspronkelijke propositie voert de kwantor " $\forall$ ", terwijl de ontkenning de kwantor " $\exists$ " bevat. Voor dit voorbeeld (zie ook voorbeeld 3-4), maar ook algemeen, geldt de ontkenningsregel voor de universele kwantor

$$\{(\forall x \in A) P(x)\}' \equiv (\exists x \in A) P'(x).$$

Hiermee bedoelen we dat de propositie links dezelfde waarheidswaarde heeft als die in het rechterlid; we zeggen dat beide proposities gelijkwaardig zijn.

De tweede ontkenningsregel is die voor de proposities die de eksistentiel kwantor " $\exists$ " bevatten. De ontkenning van "er bestaat een positief getal x zodat $x^2 = 4$ " luidt "het is niet zo dat er een positief getal x bestaat zodat $x^2 = 4$ ", met andere woorden "voor alle positieve x geldt $x^2 \neq 4$ ". De oorspronkelijke propositie kan geschreven worden als $(\exists x > 0)(x^2=4)$, terwijl de ontkenning luidt $(\forall x > 0)(x^2 \neq 4)$.

Algemeen geldt voor een willekeurige propositionele funktie $P(x)$ op een verzameling A de ontkenningsregel voor de eksistentiele kwantor

$$\{(\exists x \in A) P(x)\}' \equiv (\forall x \in A) P'(x).$$

Deze regel volgt overigens uit de vorige ontkenningsregel door de ontkenning van beide gelijkwaardige proposities te vormen en $P(x)$ en $P'(x)$ onderling te verwisselen, hetgeen toegestaan is omdat $P(x)$ een willekeurige propositionele funktie is.

De eerste ontkenningsregel wordt toegepast bij een bewijs, dat berust op het vinden van een tegenvoorbeeld. Als we bijvoorbeeld beweren "alle oneven getallen zijn priemgetallen" en we willen deze stelling op zijn juistheid nagaan, dan is het voldoende op te merken dat 9 oneven is en geen priemgetal om te bewijzen dat de propositie vals is. Om te bewijzen dat de propositie $(\forall x \in A) P(x)$ vals is is het voldoende om voor één $a \in A$ te bewijzen dat P vals is. Want dan is $(\exists x \in A) P'(x)$ waar, hetgeen de ontkenning is van de oorspronkelijke propositie.

Opmerking. De konnektieven " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\rightarrow$ " en " $\leftrightarrow$ " die voor proposities zijn ingevoerd zullen we, net als het aksent, ook gebruiken voor propositionele funkties. Als $P(x)$ de propositionele funktie " $x > 0$ " is en $Q(x)$ " $x < 3$ " dan verstaan we onder $P(x) \wedge Q(x)$ de propositionele funktie " x is groter dan 0 en kleiner dan 3". Zo kunnen we samengestelde propositionele funkties ook voorzien van kwantoren, bijvoorbeeld in $(\forall x \in A)(P(x) \wedge Q(x))$. Als A de verzameling der reële getallen tussen 0 en 1 voorstelt dan kan de propositie gelezen worden als "alle getallen tussen 0 en 1 zijn groter dan en kleiner dan 3".

Naast propositionele functies $P(x)$ van één variabele kan men ook functies van n variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$ invoeren. Dit geven we aan met $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, waarin $x_1, x_2, \dots, x_n$ alle tot zekere domeinen $A_1, A_2, \dots, A_n$ behoren.

Voorbeeld 3-7. Beschouw de propositionele functie $P(x, y)$ van twee variabelen x en y , gedefinieerd door " $x^2 + y^2 = 1$ ", waarbij $0 < x < 1$ en $-1 < y < 1$. De propositie $\forall x \exists y P(x, y)$ kan dan gelezen worden als "voor elke x bestaat er een y met de eigenschap $x^2 + y^2 = 1$ "; dit is een ware propositie. Echter $\forall y \exists x P(x, y)$ is een valse propositie, want voor $y = 0$ is geen x in $0 < x < 1$ te vinden zo dat $x^2 + y^2 = 1$.

De ontkenning van dergelijke proposities is onmiddellijk af te leiden uit de ontkenningsregels voor de beide kwantoren. Zo is

$$[\forall x \exists y P(x, y)]' \equiv \exists x [\exists y P(x, y)]' \equiv \exists x \forall y P'(x, y).$$

Ook voor meer dan twee variabelen levert de ontkenning geen moeilijkheden op.

Oefeningen.

- 1) Als met $P(x)$ de bewering " $x > 0$ " wordt aangeduid, ga dan na of $P(x)$ een propositionele functie is op de volgende verzamelingen
 - a) de verzameling N der natuurlijke getallen;
 - b) de verzameling $M = \{-1, -2, -3, \dots\}$;
 - c) de verzameling C der komplekse getallen.
- 2) Noem A de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bepaal de waarheidswaarde van de volgende proposities
 - a) $(\exists x \in A) (x+3=10)$;
 - b) $(\forall x \in A) (x+3 < 10)$;
 - c) $(\exists x \in A) (x+3 < 5)$;
 - d) $(\forall x \in A) (x+3 \leq 7)$.
- 3) Geef in logiese symbolen de ontkenning van de vier proposities uit oefening 2.

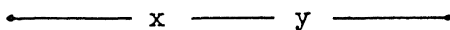
- 4) Geef de ontkenning (in woorden) van de volgende proposities
- a) als er een rel is in Amsterdam, dan worden sommige mensen neergeschoten;
 - b) alle leerlingen maken hun huiswerk dan en slechts dan als de docent opdracht geeft.
- 5) Veronderstel dat x , y en z elementen voorstellen van de verzameling $\{1,2,3\}$. Bepaal de waarheidswaarde van de volgende proposities
- a) $\forall x \exists y (x^2 + y^2 < 12)$;
 - b) $\exists x \forall y \exists z (x^2 + y^2 < 2z^2)$;
 - c) $\exists x \exists y \forall z (x^2 + y^2 < 2z^2)$.
- 6) Geef de ontkenning van de volgende proposities
- a) $\exists x \exists y \forall z P(x, y, z)$;
 - b) $\exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$.

IV Schakelalgebra.

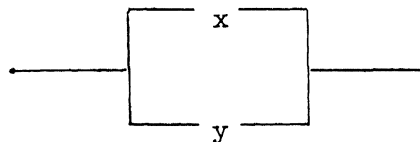
§1. Booleaanse algebra en schakelsystemen.

De Booleaanse algebra zal in dit hoofdstuk worden toegepast op digitale schakelingen. Een schakelaar zullen we aangeven met $x, y, z, a, b, c, \dots$ en we zullen uitsluitend schakelaars beschouwen die twee standen kunnen aannemen, d.w.z. die gesloten of open zijn. We associeren het symbool "0" met een open en het symbool "1" met een gesloten schakelaar. We schrijven $x = 0$ als x open is en $x = 1$ als x gesloten is. Naast x gebruiken we x' , het komplement van x en we spreken af dat $x' = 0$ als $x = 1$ en $x' = 1$ als $x = 0$. De schakelaar die altijd open is, (die geen andere stand kan aannemen) geven we aan met 0. De schakelaar die altijd gesloten is geven we aan met 1.

Vervolgens introduceren we twee operaties op de variabelen $x, y, z, a, b, c, \dots$ en de konstanten 0 en 1 en geven hier een fysiese interpretatie aan. Een schakeling die opgebouwd is uit twee schakelaars x en y in serie geplaatst geven we aan met $x \cdot y$ of kortweg xy , terwijl een schakeling met x en y parallel geplaatst aangegeven zal worden met $x + y$. We kunnen dit als volgt schematies weergeven.



serie-schakeling van x en y



parallel-schakeling van x en y

We geven hierbij niet aan of x en y open of dicht zijn; alles is mogelijk.

Het is duidelijk dat de serie-schakeling xy slechts gesloten is als zowel x als y gesloten is. In alle andere gevallen ($x=y=0$; $x=0, y=1$; $x=1, y=0$) is xy open. Eveneens is gemakkelijk in te zien dat de parallel-schakeling $x+y$ open is als x en y beide open zijn. In de andere gevallen ($x=y=1$; $x=1, y=0$; $x=0, y=1$) is $x+y$ gesloten. De volgende tabellen geven dit nog eens weer.

Tafel 1-1.

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Tafel 1-2.

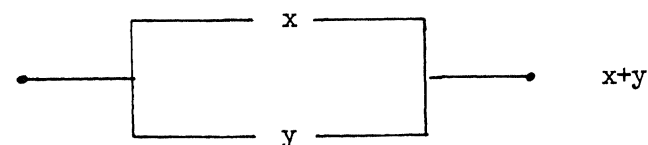
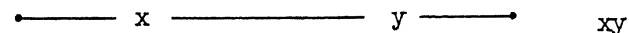
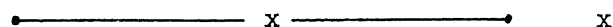
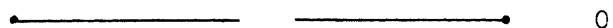
+	0	1
0	0	0
1	1	1

Met behulp van §1 uit hoofdstuk III kunnen we nu konkluderen

Stelling 1-1. De verzameling $\{0,1\}$ waarvan de elementen respektievelijk voorstellen een open en een gesloten schakelaar vormt tesamen met de operaties $.$ en $+$ gedefinieerd in Tafel 1-1 en 1-2 een Booleaanse algebra.

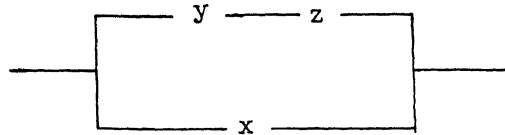
Deze Booleaanse algebra bevat slechts twee elementen, 0 en 1. De variabelen $x, y, z, a, b, c, \dots$ waarover in dit hoofdstuk sprake zal zijn, kunnen uitsluitend de waarden 0 of 1 aannemen. De variabelen stellen schakelaars voor. Het komplement x' van x volgt de regels $0' = 1$ en $1' = 0$; de operaties "+" en "." hebben een fysiese betekenis gekregen via de begrippen serie- en parallel-schakeling.

Met behulp van de volgende vijf basis-schakelingen



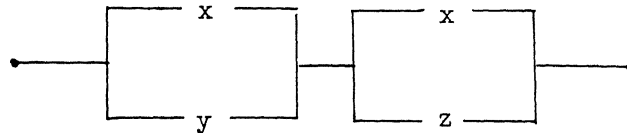
kunnen uitgebreidere schakelingen gevormd worden. Bijvoorbeeld

Fig. 1-1.



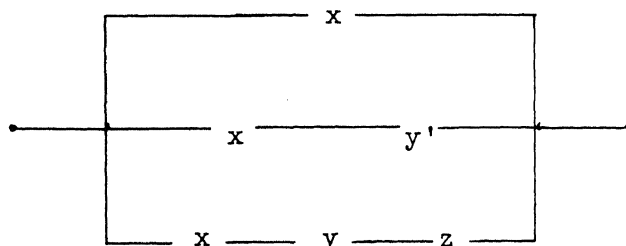
welke symbolies kan worden weergegeven door $x + yz$. Bij elke schakeling behoort een dergelijke algebraïsche uitdrukking. Omdat de variabelen elementen van een Booleaanse algebra voorstellen (0 of 1) noemen we deze uitdrukkingen, net als in hoofdstuk II, Booleaanse functies. In het huidige verband zullen we ook spreken van schakelfuncties. Omgekeerd stelt elke schakelfunctie een schakeling voor. Bijvoorbeeld $(x+y)(x+z)$ stelt de volgende schakeling voor

Fig. 1-2.

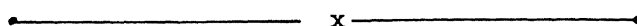


Uit de theorie van de Booleaanse algebra weten we echter dat $(x + yz) = (x+y)(x+z)$. De schakelingen uit fig. 1-1 en 1-2 hebben dus dezelfde schakelfuncties. Hieruit volgt dat voor alle mogelijke combinaties van x, y en z (0 of 1) de schakeling uit fig. 1-1 precies hetzelfde werkt als die uit fig. 1-2. We noemen deze schakelingen gelijkwaardig als de korresponderende schakelfuncties aan elkaar gelijk zijn.

Alle stellingen uit hoofdstuk II kunnen zo worden toegepast op de variabelen (die hier schakelingen voorstellen) en op de functies (die schakelingen voorstellen). Het vereenvoudigen van Booleaanse functies kan hier geïnterpreteerd worden als het vereenvoudigen van schakelingen. De volgende schakeling

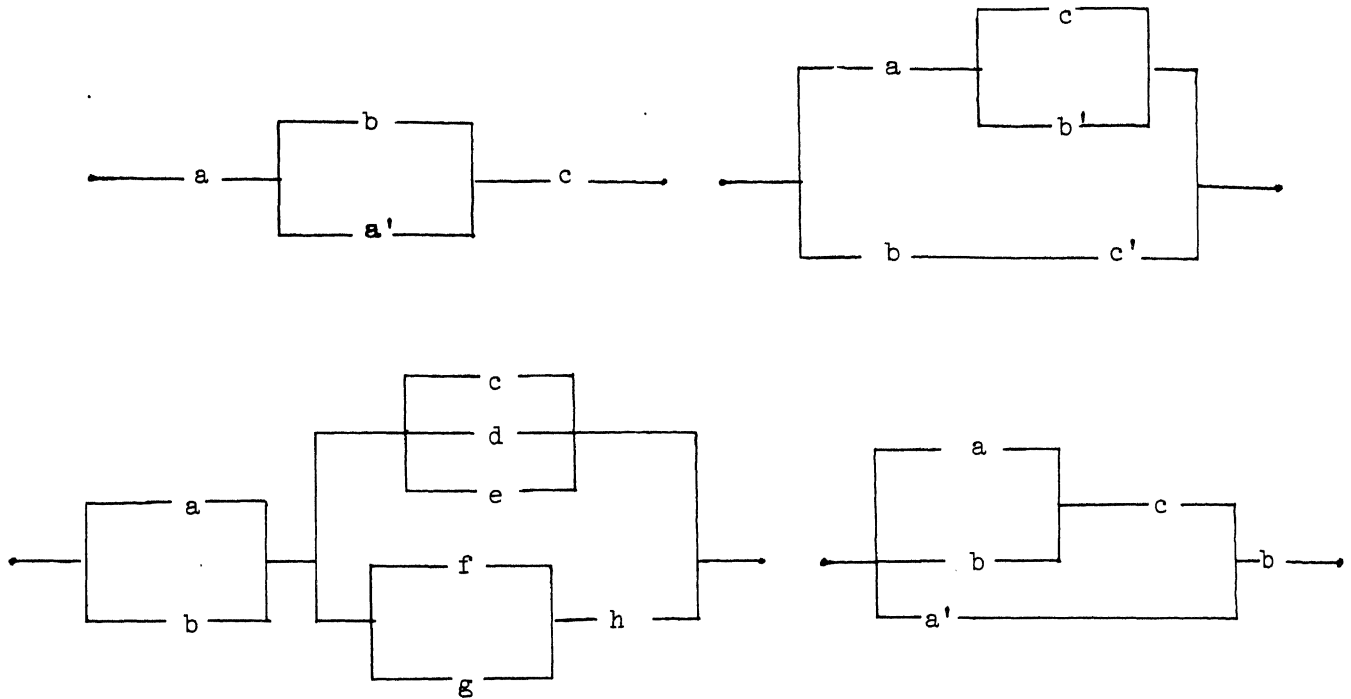


kan met behulp van de algebra vereenvoudigd worden. De schakelfunctie is namelijk $x + xy' + xyz$ en deze uitdrukking reduceert tot x . Bovenstaande schakeling kan dus door de volgende schakeling vervangen worden.



Oefeningen.

1) Bepaal de schakelfunkties van de volgende schakelingen



2) Konstrueer een schakeling bij de volgende schakelfunkties

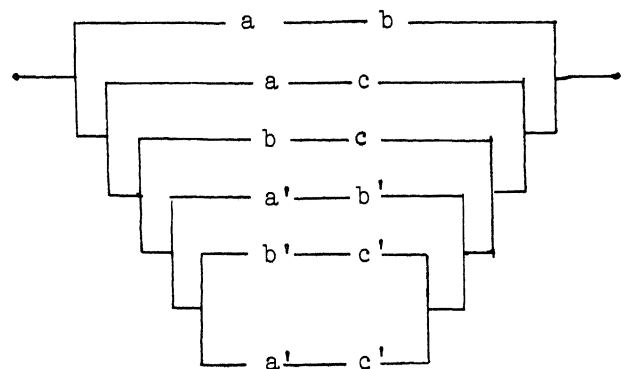
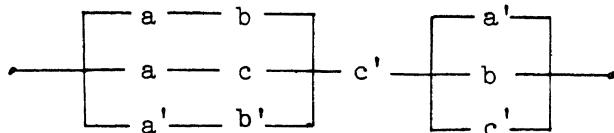
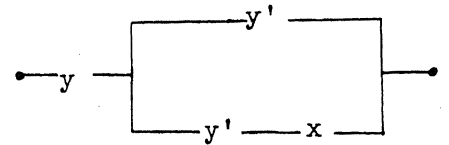
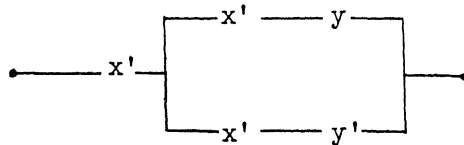
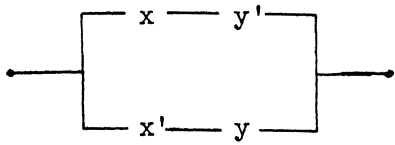
a) $xy + x' (y' + x + y)$;

b) $(x + y) z (x' + y' + z')$.

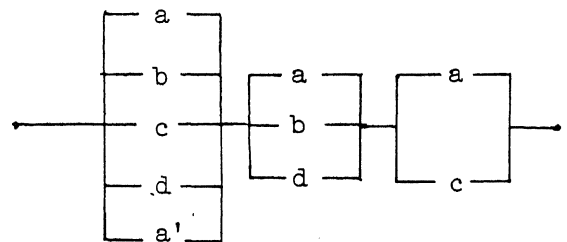
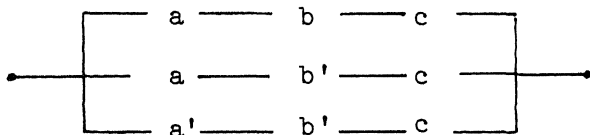
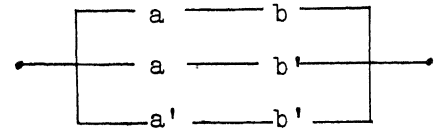
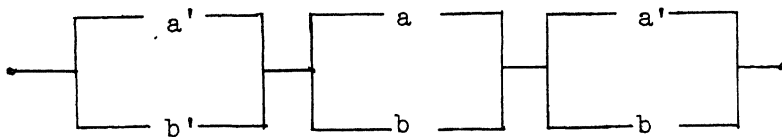
3) Bepaal de schakelingen die korresponderen met de schakelfunkties f, g en h uit de volgende waardetafel. Bepaal eerst de funkties f, g en h in disjunktieve of konjunktieve normaalvorm en zoek bij de gevonden funktie een schakeling

x	y	z	f	g	h
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

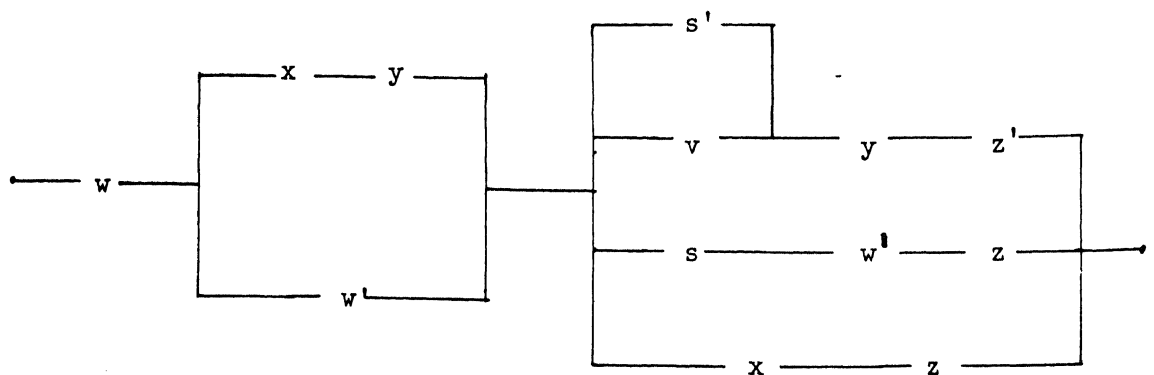
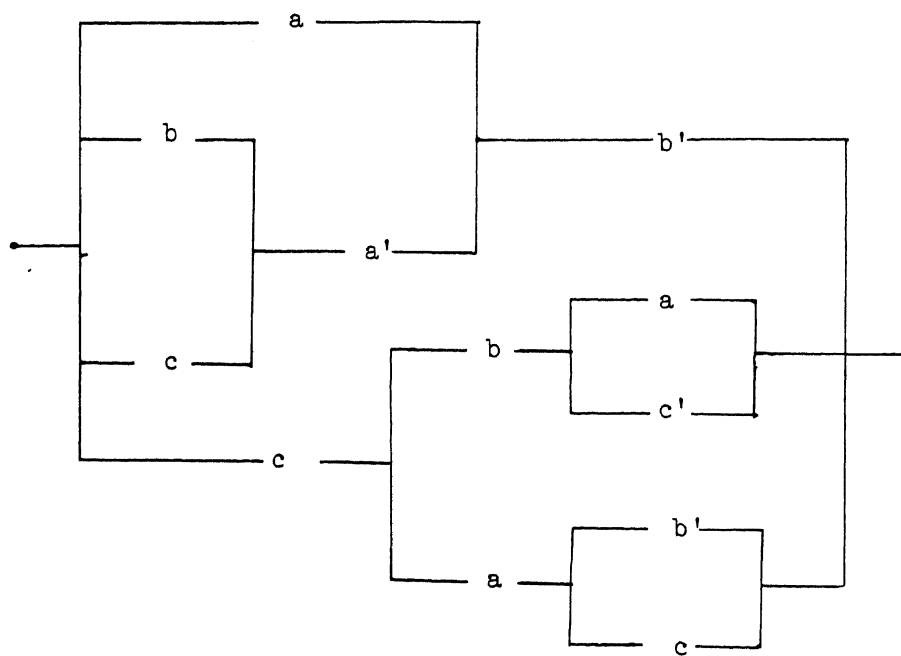
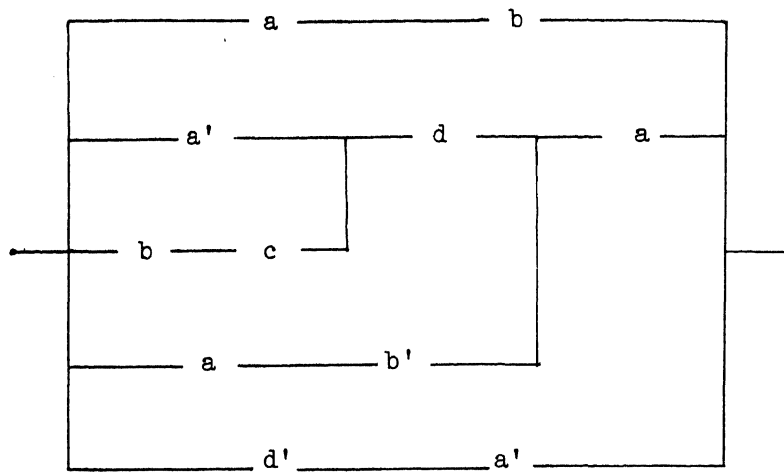
- 4) Stel de waarheidstafels op van de schakelfuncties die corresponderen met de vijf volgende schakelingen



- 5) Vereenvoudig de volgende schakelingen. Bepaal eerst de corresponderende schakelfunctie en vereenvoudig deze. Teken daarna de nieuwe schakeling.



6) Vereenvoudig de volgende schakelingen



- 7) Bepaal de schakelfunkties van de schakelingen die opgebouwd zijn uit twee schakelaars x en y voor de volgende gevallen. Teken de korresponderende schakelingen.
- a) de schakeling is open dan en slechts dan als x en y gesloten zijn;
 - b) de schakeling is gesloten dan en slechts dan als x en y gesloten zijn;
 - c) de schakeling is open dan en slechts dan als x open en y gesloten is;
 - d) de schakeling is gesloten dan en slechts dan als x gesloten of y open is;
 - e) de schakeling is gesloten dan en slechts dan als zowel x en y open als x en y gesloten zijn.
- 8) Doe hetzelfde voor een schakeling opgebouwd uit x , y en z die
- a) gesloten is dan en slechts dan als precies twee schakelaars gesloten zijn;
 - b) open is dan en slechts dan als precies twee schakelaars open zijn;
 - c) open is dan en slechts dan als precies twee schakelaars gesloten zijn;
 - d) gesloten is dan en slechts dan als de schakelaars x en y verschillende standen aannemen.
- 9) Een schakeling bevat 4 schakelaars a , b , c en d .
De schakeling is gesloten als a en b gesloten zijn of als c en d gesloten zijn. In de andere gevallen is de schakeling open.
Gebruik een waardetafel om de schakelfunctie te bepalen; vereenvoudig deze voor zover dit mogelijk is. Teken de schakeling.
- 10) Hoeveel verschillende schakelingen kan men met 2 schakelaars konstrueren? Hoeveel met $n \geq 1$?
- 11) Elke persoon van een kommissie van drie personen brengt zijn stem uit door een schakelaar te bedienen. Door het sluiten van een schakelaar stemt hij vóór, door te openen stemt hij tegen. Konstrueer een schakeling die gesloten is als een meerderheid vóór stemt.

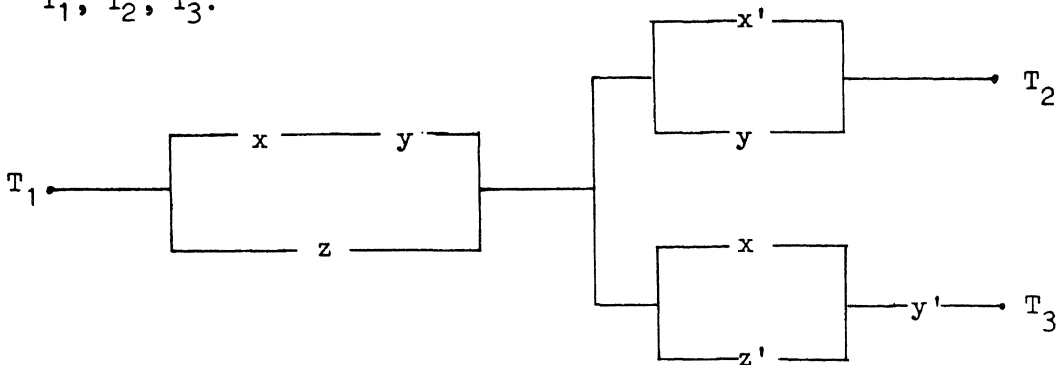
- 12) In een kamer zijn drie schakelaars aangebracht om een lamp uit of aan te doen. Konstrueer een schakeling zodat de lamp uit of aan gedaan kan worden door elk van de drie schakelaars. M.a.w. construeer een schakeling waarvan de toestand (open of gesloten) verandert door de stand van een willekeurige schakelaar te veranderen.
- 13) Konstrueer een schakeling die opgebouwd is uit twee schakelaars x en y waarmee kan worden nagegaan of x en y voldoen aan de volgende voorwaarde: als x gesloten is dan is y open.
- 14) Konstrueer een schakeling die opgebouwd is uit drie schakelaars x, y en z waarmee kan worden nagegaan of aan de volgende voorwaarden gelijktijdig is voldaan
- a) als x en y gesloten dan is z open;
 - b) als x open is en z gesloten dan is y open;
 - c) als z open is dan is x of y open;
 - d) als x of z open zijn dan is y gesloten.
- 15) In de Oranje Vrijstaat wordt een kabouterfeest georganiseerd waarbij de bezoekers onderworpen zijn aan de volgende bepalingen wat de kleding betreft
- a) als een puntmuts wordt gedragen dan moet een trui of sjerp worden gedragen;
 - b) als een trui en een sjerp worden gedragen dan moet een puntmuts worden gedragen;
 - c) als geen trui of geen puntmuts wordt gedragen dan moet een sjerp worden gedragen.

Iedere gast wordt bij zijn entree gecontroleerd of hij zich aan de voorschriften heeft gehouden.

Stel voor de controleur een schakeling op, opgebouwd uit drie schakelaars p, t en s (ter controle voor het dragen van puntmuts, trui of sjerp) waarmee hij kan nagaan of een gast zich aan de voorschriften heeft gehouden. Konstrueer de schakeling zo, dat hij in dat geval gesloten is.

§2. Andere schakelsystemen.

In de vorige paragraaf zijn uitsluitend schakelingen beschouwd met twee eindpunten. In de volgende schakeling is sprake van drie eindpunten T_1 , T_2 , T_3 .



Het is niet mogelijk om voor deze schakeling één schakelfunctie aan te geven. De schakeling wordt door meer dan een schakelfunctie gekarakteriseerd. We kunnen in dit geval drie schakelfuncties opstellen, namelijk

de schakelfunctie f_{12} bij de schakeling tussen T_1 en T_2 ;
 de schakelfunctie f_{13} bij de schakeling tussen T_1 en T_3 ;
 de schakelfunctie f_{23} bij de schakeling tussen T_2 en T_3 .

Zo is $f_{12} = (xy+z)(x'+y) = xy + x'z + yz$,

$f_{13} = (xy+z)(x+z')y' = xy'z$.

$f_{23} = (x'+y)(x+z')y' = x'y'z'$.

Omgekeerd kunnen we ook bij gegeven functies een schakeling bepalen. In het vorige voorbeeld zouden we dan genoeg hebben aan f_{12} en f_{13} . Hiermee is dan f_{23} bepaald. Bij de konstruktie van schakelingen met meer dan twee eindpunten is het gewenst op de verschillende wegen zoveel mogelijk schakelaars te laten samenvallen. De functies kunnen dan ook het beste eerst in lineaire factoren worden ontbonden of in conjunctieve normaalvorm worden geschreven.

Voorbeeld.

Konstrueer een schakeling met 4 eindpunten als gegeven is dat

$$f_{12} = a(b+cd)(x+y),$$

$$f_{13} = a(bc+cd),$$

$$f_{14} = a(bc'+b'cd).$$

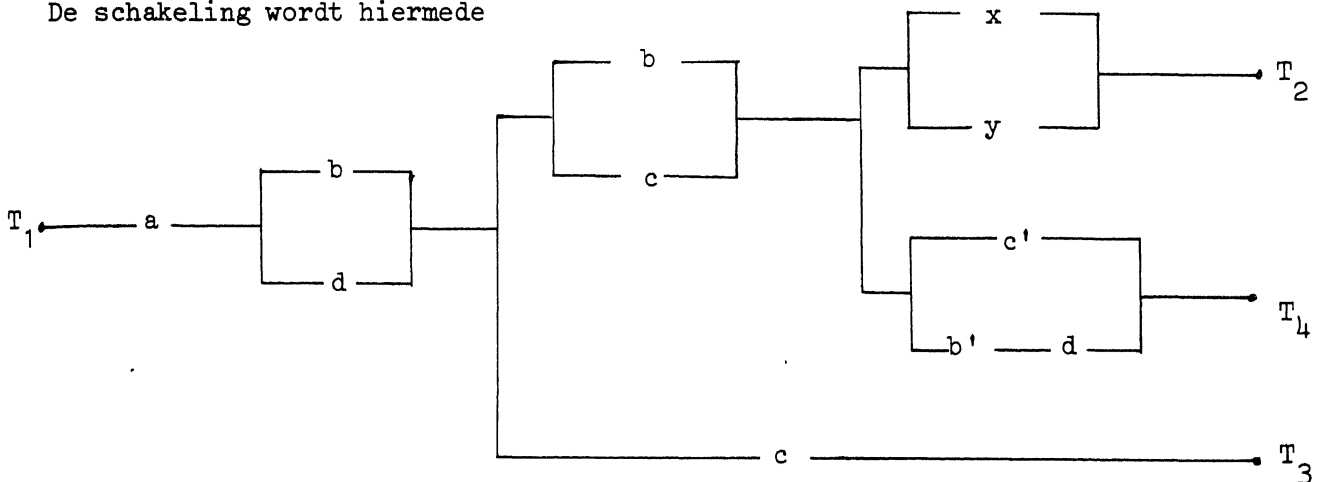
Ontbinding in lineaire factoren geeft

$$f_{12} = a(b+c)(b+d)(x+y),$$

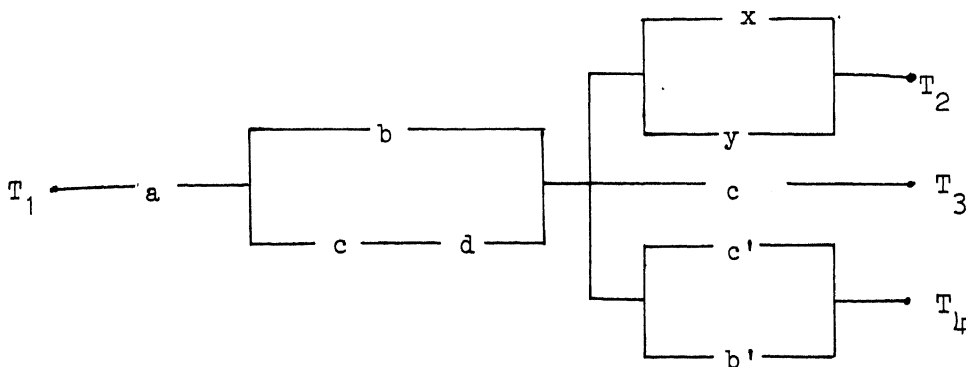
$$f_{13} = a(b+d)c,$$

$$f_{14} = a(b+c)(b+d)(b'+c')(d+c').$$

De schakeling wordt hiermede

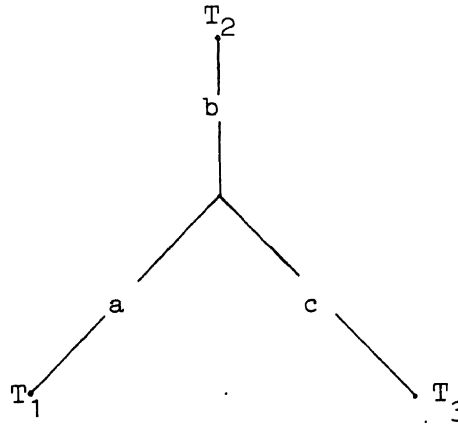


Ga na dat deze schakeling vereenvoudigd kan worden tot

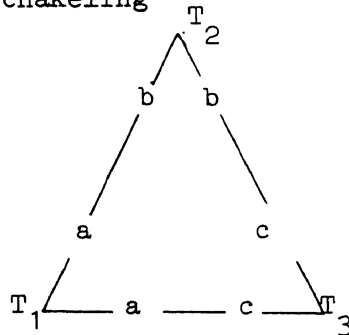


Algemener kunnen we schakelingen met n eindpunten $T_1, T_2, \dots, T_n$ beschouwen met schakelfuncties f_{ij} , ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) voor de schakeling tussen T_i en T_j ($i \neq j$).

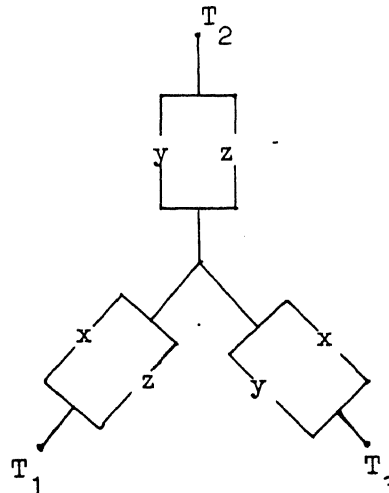
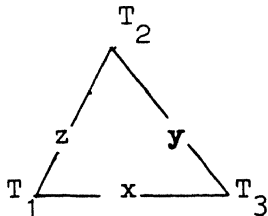
Een eenvoudig voorbeeld van een schakeling met drie eindpunten is



met $f_{12} = ab$, $f_{13} = ac$ en $f_{23} = bc$. Dezelfde schakelfuncties komen voor bij de volgende schakeling



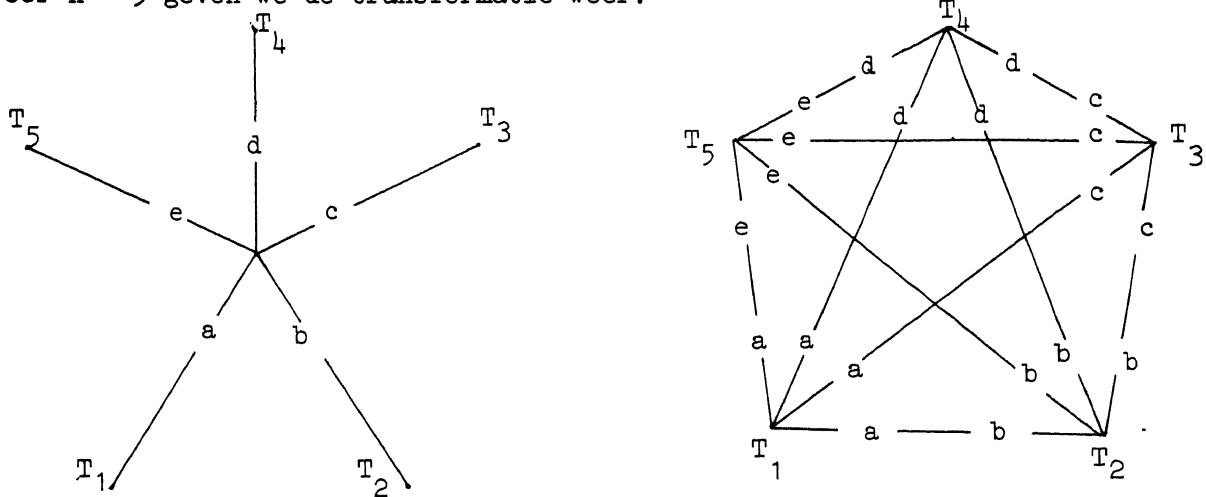
De eerste schakeling met de Y-vorm is getransformeerd naar een schakeling met de Δ -vorm. We spreken van de Y- Δ transformatie. Merk op dat de schakeling tussen T_1 en T_3 nu ook een weg bevat over T_2 . De schakelfunctie f_{13} is dan ook opgebouwd uit ac (rechtstreekse verbinding via T_2) en uit $abbc$ (verbinding via T_2) zodat $f_{13} = ac + abbc = ac$. De transformatie van de Δ -vorm naar de Y-vorm is in de volgende figuur aangegeven.



Men spreekt hier van de Δ -Y transformatie. De schakeling tussen T_1 en T_3 links heeft als schakelfunctie $f_{13} = x + yz$. Rechts is deze functie $f_{13} = (x+z)(x+y)$ hetgeen gelijk is aan de vorige.

Bij de Y-vorm is een knooppunt waar drie wegen bijeenkomen getransformeerd naar een figuur met drie zijden. Algemener geldt dat een schakeling met een knooppunt waar n wegen samenkomen getransformeerd kan worden naar een figuur met n zijden. Ook de diagonalen van de n -hoek zullen dan als schakelweden gaan dienen; bij de driehoek kon hier nog geen sprake van zijn. We spreken in het algemeen van een ster-maas transformatie.

Voor $n = 5$ geven we de transformatie weer.

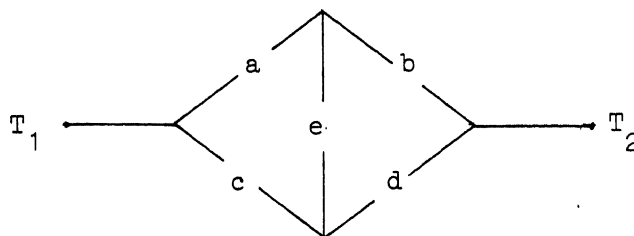


De snijpunten van de diagonalen zijn geen knooppunten voor de schakeling en moeten als kruisende wegen worden beschouwd die geen kontakt maken.

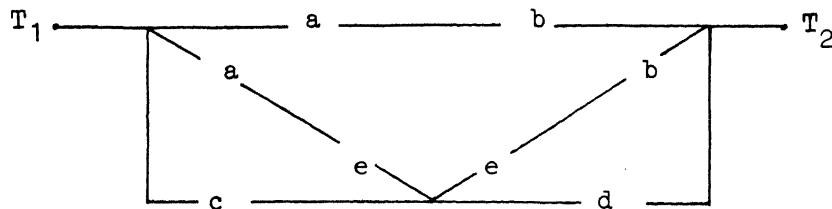
De maas-ster transformatie is niet altijd uitvoerbaar.

De Y- Δ transformatie kan gebruikt worden bij de analyse van de volgende schakeling.

Fig. 2-1.

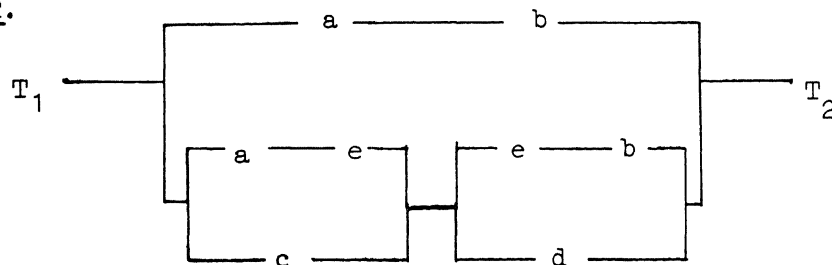


Hoewel er twee eindpunten zijn valt deze schakeling niet onder de schakelingen uit §1. De weg langs e vormt een brug over de twee parallelle takken a b en c d. We spreken van een brug-schakeling. Het punt waar de wegen langs a, b en e samenkomen kan als een knooppunt worden beschouwd waarop de Y-Δ-transformatie toegepast kan worden. Het resultaat is



en deze schakeling valt wel onder de serie-parallel schakeling van §1. Even anders getekend wordt deze schakeling

Fig. 2-2.



De schakelfunctie van deze schakeling is

$$f = ab + (ae+c)(eb+d) = ab + ade + bce + cd.$$

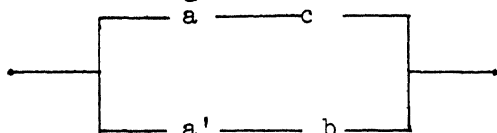
Er bestaat overigens een andere methode om de schakelfunctie van een brug-schakeling op te stellen. Daarvoor gaan we in de oorspronkelijke tekening fig. (2-1) alle wegen na van T_1 naar T_2 . Er zijn er vier.

We stellen dan voor elke weg de schakelfunctie op.

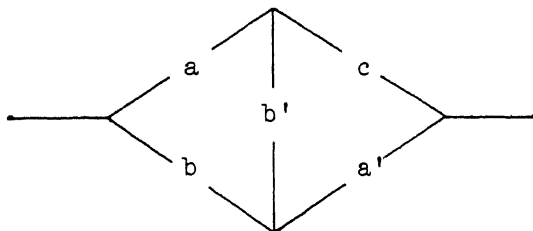
Zo vinden we ab, aed, ceb en cd. De schakelfunctie van de totale schakeling luidt dan $f = ab + aed + ceb + cd$ en dit is dezelfde functie als die bepaald werd met behulp van de schakeling in fig. 2-2.

De schakeling in fig. 2-1 geniet de voorkeur omdat daar sprake is van 5 kontakten van 5 schakelaars, terwijl in fig. 2-2 8 kontakten voorkomen. Het is altijd mogelijk bij een brug-schakeling een gelijkwaardige serie-parallel schakeling te vinden. Omgekeerd kan een serie-parallel schakeling soms vereenvoudigd worden door naar een brug-schakeling te zoeken. Als er een brug-schakeling bestaat hoeft dit niet altijd winst op te leveren.

Bijvoorbeeld, de schakeling



met 4 kontakten en 3 schakelaars is gelijkwaardig met



en deze schakeling telt 5 kontakten.

Oefeningen.

- 1) Konstrueer een schakeling met 4 eindpunten met de schakelfunkties f_{12} , f_{13} en f_{14} die in de volgende tabel zijn aangegeven.

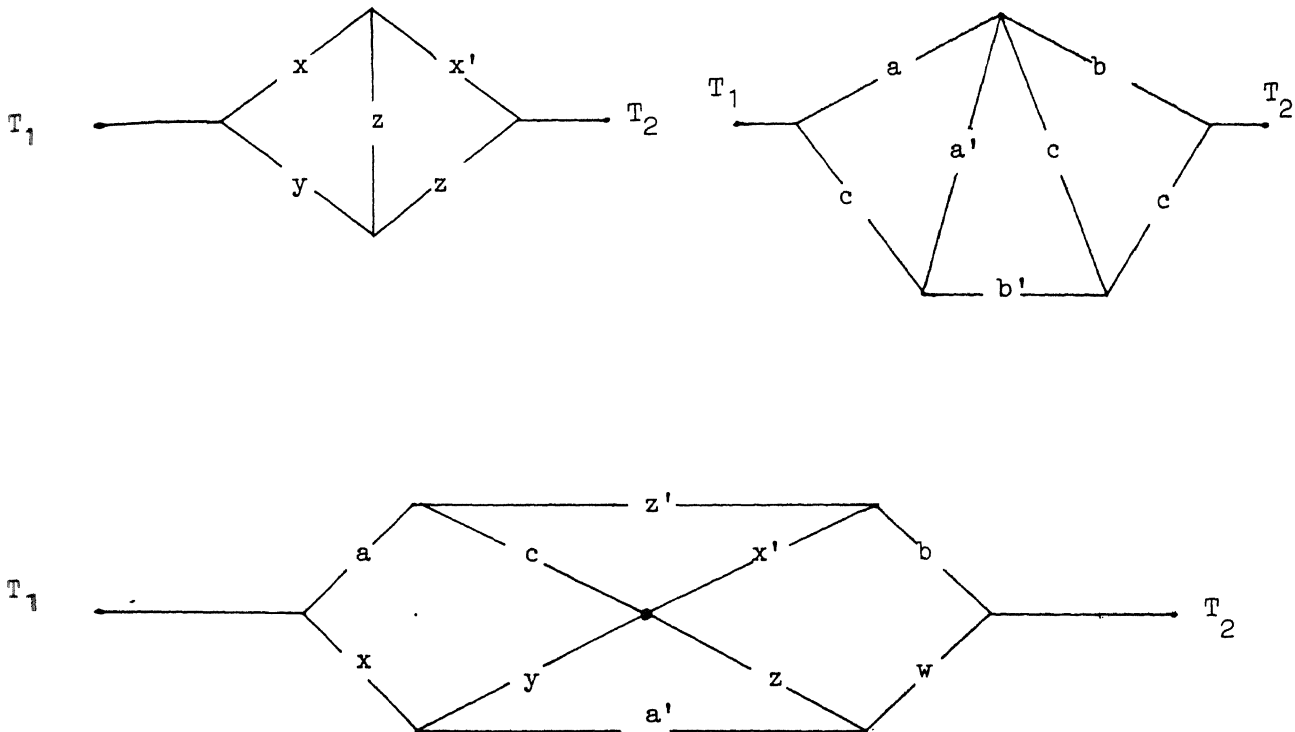
x	y	z	f_{12}	f_{13}	f_{14}
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

- 2) **Konstrueer** een schakeling met drie eindpunten met de volgende schakelfunkties

$$f_{12} = abx + abyz,$$

$$f_{13} = ax + byz + xb + ayz.$$

- 3) **Bepaal** de schakelfunctie van de volgende schakelingen. Vereenvoudig ze indien dit mogelijk is



In de laatste figuur dient het punt in het midden als knooppunt te worden beschouwd.

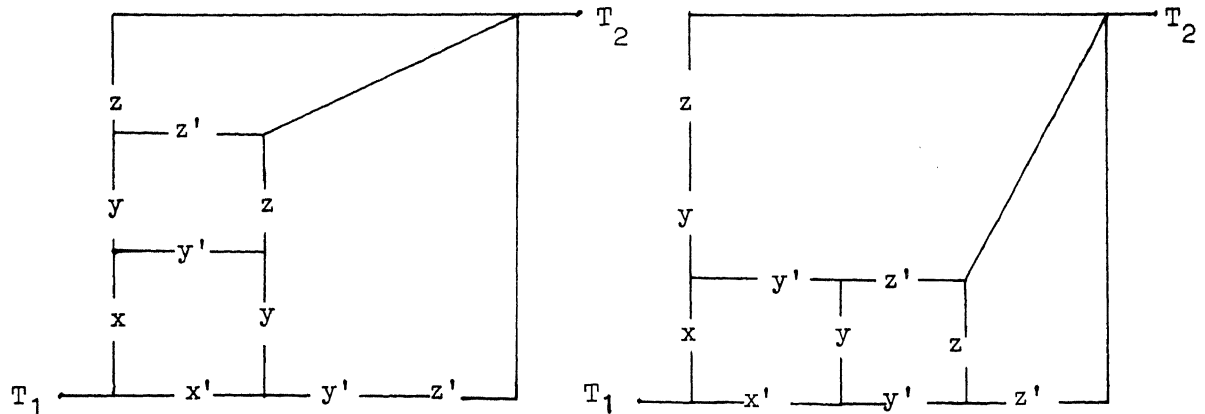
- 4) **Zoek** een brug-schakeling bij de volgende schakelfunkties

a) $f = xv + zw + xyw + zyv$;

b) $g = xv + zab + zyv + xyab$;

c) $h = xw' + y'uv + (xz+y')(zw'+uv)$.

- 5) Konstrueer een brug-schakeling voor oefening 8a van de vorige paragraaf.
- 6) Ga na dat de volgende schakelingen de schakelingen voorstellen uit respectievelijk 8b en 8c van de vorige paragraaf.



- 7) Teken een soortgelijke schakeling voor de schakeling uit oefening 11 van de vorige paragraaf.
- 8) Eveneens voor die uit oefening 12 van de vorige paragraaf.
- 9) Teken, zonder eerst de schakelfunctie te bepalen, een schakeling die vier schakelaars bevat en die gesloten is dan en slechts dan als
- a) precies drie schakelaars gesloten zijn;
 - b) precies twee schakelaars gesloten zijn;
 - c) precies drie of precies één schakelaar gesloten is;
 - d) precies twee of vier schakelaars gesloten zijn;
 - e) precies één, precies twee of precies drie schakelaars gesloten zijn;
 - f) geen of precies drie schakelaars gesloten zijn.

- 10) Konstrueer een schakeling voor een kamer waarin vier schakelaars aanwezig zijn om een lamp aan of uit te doen, zodanig dat elke schakelaar gebruikt kan worden om de lamp aan of uit te doen, ongeacht de stand van de overige drie.

- 11) Konstrueer een schakeling bestaande uit 4 schakelaars die gesloten is dan en slechts dan als
 - a) precies één schakelaar gesloten is;
 - b) precies twee opvolgende schakelaars gesloten zijn;
 - c) precies drie opvolgende schakelaars gesloten zijn.

Literatuur

1. J.T. CULBERTSON, Mathematics and Logic for Digital Devices, D. van Nostrand Company, (1958).
2. H. FREUDENTHAL, Exacte Logica, De Erven F. Bohn N.V., Haarlem, (1961).
3. F.E. HOHN, Applied Boolean Algebra - An elementary Introduction, The Macmillan Company, New York, (1963).
4. J.E. WHITESITT, Boolean Algebra and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, (1961).

Lijst van errata

p.5 betekent pagina 5;

r.5 betekent 5^{de} regel van boven;

r.-5 betekent 5^{de} regel van onder.

p.9 r.-5 lees f) $B' + C'$;

p.12 r.16 lees $XY + XZ'$,

p.20 r.1 lees 3) Beschouw op een klasse van verzamelingen, die
 alle deelverzamelingen zijn van een universele
 verzameling U , de operatie gedefinieerd door

p.21 r.13 lees Voor elk element a

p.24 r.4 lees 7) $ab' = 0$

p.25 r.-7 lees $(x_1 + x_1')$

p.26 r.-2 lees Definitie 3-2

p.28 r.12 lees binaties zal

p.28 r.-8 lees Stelling 3-5

p.30 r.14 lees Stelling 3-6

p.32 r.-4 lees Definitie 4-2

p.39 r.-7 lees proposities verbonden door

p.46 r.2 lees b) $(P \wedge Q') \rightarrow P$;

p.46 r.-4 lees $\longleftrightarrow (Q \wedge (P \vee R))]$.

p.46 r.-3 lees "waarheidstafels"

p.52 r.-2 lees $P(x,y,z);$

p.54	Tafel 1-2 rechterkolom	1
------	------------------------	---

p.55 r.-9 lees (die hier schakelaars voorstellen)

p.57 r.1 lees 4) Stel de waardetafels op

p.61 r.-4/-3 lees voor "schakelaars" "kontakten"

p.62 r.-1 lees — d — b' —